NUMBER FUN WITH A CALENDAR

By P. K. Srinivasan

(Translated into Marathi by Dr. Madhukar Deshpande)

दिनदर्शिकेतील संख्यांचा चमत्कार

1. चला, आपण एक खेळ खेळू या.

माझे नाव प्रसाद. मी नववीत आहे. माझा धाकटा भाऊ रवि सातवीत आहे आणि बहीण सुशीला पाचवीत. आमच्या वडिलांचा कापडाचा व्यवसाय आहे. आठवडाभर ते त्यांच्या कामात व्यस्त असतात. पण त्यांना सुटीचा दिवस आमच्याबरोबर घालवायला फार आवडते. गणित हा त्यांचा अत्यंत आवडता विषय आहे आणि त्यांना आपल्या सभोवताली कोणत्याही बाबतीत गणित कुठे दिसते का ते पहायला आवडते. त्यांच्यामुळेच आम्ही कागदाचे कपटे, रेल्वेची तिकिटे, आलेखांचे कागद, अशांचा उपयोग करून गणितातले बरेच खेळ आणि गमती जमती शिकलो आहोत. या खेळांमुळे आमच्यात गणिताविषयी आवड वाढीस लागलेली आहे आणि गणिती विचार आम्हाला वर्गातल्या इतर विद्यार्थ्यांच्य मानाने पटकन जमतो.

आम्ही कधी काही वस्तु घरात विकत आणली की तिचा उपयोग करून काहीतरी गणिती खेळ ते आम्हाला शिकवितात. आमच्या आता हे पक्के लक्षात आले आहे की कुठल्याही खेळात गणिताचा काही ना काही तरी संबंध सापडतोच.

यंदाच्या म्हणजे 2004 या वर्षीच्या दिनदर्शिकेकडे मी पहात होतो. आम्ही ऑगस्टमध्ये सहलीचा विचार करीत होतो. मी पाहिले की ऑगस्टच्या एक तारखेला रविवार आहे. ऑगस्ट महिन्यात आम्हाला आणि बाबांच्या व्यवसायाला बऱ्याच सुटया होत्या. मी त्यांना विचारले , "दिनदर्शिकेतील ऑगस्टमधल्या 31 आकडयांचा वापर करून काही खेळ तयार करता येईल का?" बस. मी येवढे म्हणण्याचाच अवकाश, दिनदर्शिकेतील बऱ्याच संख्यांचे गमतीचे खेळ बाबांनी तयार केले.

बाबा एखादी सुचना करायचे आणि तिच्यातून अनेक नमुने (patterns) आम्हाला दिसायचे व आमचे आम्हीच शोध लावायचो. आता आम्ही आमच्या शोधांचीच ही कथा तुमच्या समोर एका दिनदर्शिकेतील पानावर मांडतो आहोत आणि तुम्हाला आमच्या बरोबर हा खेळ खेळण्याचे अवाहन करीत आहोत. आहात तयार? मी नक्की आश्वासन देतो की तुम्हाला खूप मजा येणार आहे आणि खूप काही शिकायलाही मिळणार आहे. तर करतो सुरुवात.

सर्वात आधी बाबांनी आम्हाला सुशीलेच्या पाटीवर दिनदर्शिकेसारखी वाटणारी अशी पुढील संख्या रचना तयार करून दिली.

					1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31				

मग त्यांनी विचारले, "कुठल्याही एका महिन्याचे दिवस दिनदर्शिकेत असे मांडलेले दिसतील का"? आधी आम्ही हा कागद दिनदर्शिकेशी जुळतो का हे पाहणार होतो. पण त्यांनी लगेच सांगितले की तसे न करता फक्त पाटीच्या निरिक्षणाने उत्तर द्यायचे. आधी त्यांनी तसे सुशिलेस विचारले पण तिला काही चटकन उत्तर सुचेना. मग रविने म्हटले की आठवडयात सातच दिवस असतात तेंव्हा दिनदर्शिकेच्या एका महिन्याच्या पानावर सातच स्तंभात संख्या असायला हव्यात. म्हणून पाटीवर दिलेली रचना दिनदर्शिकेत असणार नाही. मी म्हणालो की एका खाली एक अशा संख्यांमध्ये दिनदर्शिकेत सातचा फरक असतो पण येथे तो फरक आठचा आहे म्हणून हा तक्ता दिनदर्शिकेत बसणारा नाही.

अशा प्रकारे आमची दिनदर्शिकेची रपेट सुरु झाली.

2. झटपट बेरीज आणि सरासरी.

बाबा– हा पहा ऑगस्ट 2004 या महिन्याचा दिनदर्शिकेतील तक्ता.

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

रवि, आता मला कोणतीही एक रांग दाखव. मी त्या रांगेतील सर्व संख्यांची सरासरी चटकन सांगेन.

रवि– दुसरी रांग.

बाबा– अकरा.

प्रसाद– हं. कारण त्या रांगेतल्या पाच संख्यातली मधोमध असणारी संख्या अकरा आहे म्हणून का?

बाबा– हे बघ, आधी आपण हे ठरवायला हवे की एखाद्या श्रेणीतील (sequence) संख्यांची सरासरी श्रेणीतील नेमक्या मधल्या संख्येयेवढी केंव्हा असणार. त्यासाठी दिनदर्शिकेतील संख्यांची श्रेणी कशी असतो हे पहा.

प्रसाद– आपणास रांगेतील संख्या, स्तंभातील संख्या आणि दोन्ही तिरक्या कर्णांच्या दिशेतील संख्या अशा तीन प्रकारच्या श्रेणी मिळतात. यातील प्रत्येक संख्यानुक्रम गणितश्रेणीत आहे. त्यापैकी रांगेतल्या संख्या 1, 1+1=2, 2+1=3, अशा क्रमात आहेत जेथे दोन सलग संख्यातील सामान्य फरक (common difference) 1 आहे.

बाबा– आणि स्तंभातल्या संख्यांचा अनुक्रम?

रवि– त्या संख्या सातने वाढतायत. उदाहरणार्थ, 1, 1+7=8, 8+7=15, इत्यादि. म्हणजे येथे सामान्य फरक 7 आहे.

बाबा– आणि कर्णांचा क्रम?

प्रसाद– येथे दोन प्रकारचे कर्ण आहेत. डावीकडून उजवीकडे खाली येणाऱ्या किंवा वायव्य–अग्नेय कर्णातील संख्या आठने वाढतायत. जशा 1, 1+8=9, 9+8=17, इत्यादि. आणि उलटया बाजूने वरून खाली डावीकडे जाणाऱ्या, किंवा इशान्य–नैऋत्य कर्णातील संख्या सहाने वाढतायत असे दिसते. कारण 4 च्या खाली 4+6=10, आणि 10 च्या खाली 10+6=16, अशा संख्या आहेत.

बाबा– अशा अनुक्रमांना, ज्यात पुढची संख्या मागच्या संख्येत एक स्थिर असा सामान्य फरक मिळवुन बनते, आपण गणितश्रेणी असे नाव देतो.

रवि– बाबा, पहिल्या स्तंभातील संख्यांची सरासरी 15 असणार, हो ना?

बाबा– अगदी बरोबर. आता उलट विचार करा. या दिनदर्शिकेत नेमक्या दोन संख्याश्रेणींची सरासरी 17 आहे. त्या श्रेणी कोणत्या हे कसे ओळखाल? ओळखा पाहू.

रवि– 3, 10, 17, 24 आणि 31 हा एक अनुक्रम. आणि 5, 11, 17, 23 आणि 29 हा दुसरा अनुक्रम.

सुशीला– पण मग 15, 16, 17, 18, 19, 20 आणि 21 हा अनुक्रम का नाही? तोही याच दिनदर्शिकेत आहे.

रवि– कारण17 ही संख्या या क्रमात मधोमध नाही म्हणून. पण बाबा, मला एक शंका आहे. अस म्हणता येईल का, गणितश्रेणीमधील सर्व संख्यांची बेरीज करून जेवढया संख्या घेतल्या असतील त्या आकडयाने या बेरजेस भागले तर येणारी सरासरी संख्या ही नेहमी मधलीच संख्या असते?

बाबा– करून पहा म्हणजे समजेल.

रवि– (1+2+3+4+5+6+7)/7 = 28/7 = 4. तसेच (1+8+15+22+29)/5 = 75/5 = 15.

निदान या दोन बाबतीत तरी बरोबर तसच दिसतय.

बाबा– आता रविने जे केले त्यामुळे जशी सरासरी काढता येते तशीच एकुण सर्व संख्यांची बेरीजही काढता येईल. आता कुठलीही रांग सांग.

सुशीला– दुसरी.

प्रसाद– 77. बरोबर ना?

रवि.– अच्छा. म्हणजे एकुण सात संख्यांची सरासरी 11 आहे तर त्यांची बेरीज 77 असणार. असेच ना? पण मग चौथ्या स्तंभातील संख्यांची बेरीज कशी करायची?

बाबा– त्या स्तंभात मधली संख्या नाही. तरी पण मी उत्तर लगेच देऊ शकतो. 58.

सशीला– 4+11+18+25=58. होय, बरोबर आहे उत्तर. पण तुम्ही ते कसं काढलं?

रवि.– खरच बाबा. कसं काढायचं हे उत्तर?

बाबा– येथे चार संख्या आहेत. अशा वेळी पहिली आणि शेवटची अशा संख्यांची बेरीज घ्यायची. 4+25=29. मग या बेरजेस एकुण संख्यांच्या निम्या संख्येने, म्हणजे जेवढया जोडया आहेत तेवढयाने गुणायचे. म्हणजे 29x2=58 हे झाले उत्तर.

सुशीला– जेंव्हा आकडयंची संख्या विषम असते तेंव्हा मधले पद मिळते. पण जेंव्हा आकडयांची संख्या सम असते तेंव्हा मधली अशी कुठलीच संख्या नसते.

प्रसाद– जेंव्हा गणितश्रेणीतील पदांची संख्या विषम असते, तेंव्हा मधले पद हीच त्या पदांची सरासरी असते. आणि त्या सरासरीस पदसंख्येने गुणले की सर्वांची बेरीज झाली. पण जर पदसंख्या सम असेल तर मग....

रवि– अशा वेळी मधले पद नसते. पण मग पहिली आणि शेवटची संख्या यांच्या बेरजेस पदसंख्येच्या निम्या संख्येने गुणायचे की बेरीज मिळेल.

बाबा– खरे तर पहिली आणि शेवटची संख्या यांचीच जोडी हवी असे नाही. वरुन दुसरी आणि खालून दुसरी अशा संख्यासुद्धा चालतील. थोडक्यात काय तर त्या दोन संख्यांचा वरून आणिउलट दिशेने खालून क्रम सारख्याच अंतरावर असायला हवा. त्या संख्या समस्थित (equidistant) असाव्यात असे आपण म्हणू.

रवि– 4, 11, 18, 25 यापैकी 4 आणि 25 ही जोडी घेतली काय अगर 11 आणि 18 ही जोडी घेतली काय, बेरीज नेमकी 29 च येणार.

बाबा– छान, छान.

प्रसाद– नियम असा करता येईल की दोन्ही बाजूंनी समस्थित पदे घ्यावीत. आणि त्यांच्य बेरजेस एकुण पदसंख्येच्या निम्याने गुणावे.

बाबा– अगदी योग्य शब्दात नियम मांडलास. मी तुम्हा मुलांना गाउस या जर्मन गणितज्ञाची एक गोष्ट सांगितली का?

सुशीला– नाही बाबा, आधी ती गोष्ट सांगा.

बाबा– मग ऐका. जेंव्हा गाउस तिसरीत होता तेंव्हा एक दिवस त्याच्या मास्तरांना वर्गातील मुलांना काही तरी उद्योगात तास भर गुंतवायचे होते. त्यांनी मुलांना सांगितले की एक ते शंभर या संख्या पाटीवर लिहून त्या सर्वांची बेरीज करा. बेरीज करून पूर्ण झाली की पाटी टेबलावर ठेवायला मास्तरांनी सांगितले. गाउसला आधी हा प्रश्न आवडला. त्याने स्वतः बऱ्याच अशा प्रकारच्या गोष्टी कुणी न सांगता करून पाहिलेल्या होत्या. त्याने थोडा विचार केला आणि सर्व संख्यांची बेरीज 5050 अशी पाटीवर लिहिली आणि टेबलावर पाटी ठेवून दिली.

रवि– पण त्याने एक ते शंभर हे आकडे पाटीवर लिहिले का?

बाबा– नाही.

सुशीला– मग तर शिक्षक खूप रागावले असणार.

दादा– होय तर. मास्तरांना राग तर आलाच. पण त्यांना कुतुहल होते की वर्गातल्या या हुषार मुलाने जरी झाले तरी असे इतक्या चटकन उत्तर कसे काढले? त्याने सरळच गाउसला विचारले की त्याला उत्तर इतक्या लौकर कसे आले?

रवि– एक ते शंभर या संख्या लिहिल्या तर पहिली आणि शेवटची संख्या यांची बेरीज 101 अशी होते. आणि बेरजेसाठी पदांच्या संख्येच्या निम्याने म्हणजे पन्नासने तिला गुणले की झाले. आले उत्तर 5050.

प्रसाद– पण हे सगळे त्या तिसरीतला मुलाला सुचले का?

बाबा– होय. आणि यातच त्याच्या बुद्धिमत्तेची झलक मास्तरांना दिसून आली.

सुशीला– बापरे, म्हणूनच तो एवढा मोठा गणितज्ञ होऊ शकला असला पाहिजे.

प्रसाद–   पण सम पदांच्या बेरजेसाठी पहिली आणि शेवटची यांच्या बेरजेस पदसंख्येच्या निम्म्याने गुणायचे आणि विषम पदांच्या श्रेणीसाठी मधली संख्या गुणिले पदसंख्या असे वेगवेगळे नियमच लावायला हवेत का? एकच नियम सम आणि विषम पदसंख्या अशा दोन्ही बाबतीत लागू पडत असता तर ते सोपे आणि छान वाटले असते. तसे करता येईल?

बाबा–   छान प्रश्न विचारलास. त्यासाठी आता सात पदे असलेली दिनदर्शिकेतली दुसरी रांग पहा.

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 ही ती रांग. पण या विषम संख्या पदावलीस आपण तीच पदावली पुढे लिहून सम संख्य करू या.

रवि–   म्हणजे 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 असे लिहावे लागेल.

बाबा–   अगदी बरोबर. आता दोन्ही बाजूकडून सारख्याच अंतरावरच्या सर्व जोडयांची बेरीज नेमकी 22 येते का हे पहा.

रवि–   8+14=22, 9+13=22, 10+12=22 वगैरे सर्व जोडयांची बेरीज 22 आहे.

बाबा–   अशा आपल्या पदावलीत एकुण किती जोडया आहेत?

रवि–   7.

बाबा–   मग आता या सात जोडयांची बेरीज किती असेल?

सुशीला– 7x22=154 ही एकुण बेरीज असणार.

प्रसाद–   होय. पण आपण दिलेली पदावली दोनदा घेतली आणि बेरीज 154 आली. पण जर एकाच पदावलीची बेरीज हवी असेल तर निम्मी म्हणजे 77 बेरीज येईल.

बाबा–   आता लक्ष देऊन ऐका. 8 ही पहिली आणि 14 ही शेवटची संख्या आहे. यांची बेरीज 22 झाली. एकुण 7 पदे आहेत म्हणजे पदावलीच्या बेरजेची दुप्पट 7x22 किंवा 154 होईल. आणि पदावलीची बेरीज हवी असेल तर 1/2x7x(8+14) असे उत्तर येईल. आता आपणास हेच सूत्ररुपात मांडायचे असेल तर आपण म्हणू की पदावलीत एकुणn संख्या असतील, पहिली संख्या a असेल आणि शेवटची l असेल तर एकुण बेरीज किती असेल?

रवि–   1/2xnx(a+l).

प्रसाद–   आणि जर पदसंख्या सम असेल तरी तेच सूत्र उपयोगी येईल. कारण आपण पहिलेच की जर 4, 11, 18, 25 ही पदावली असेल तर आपण पूर्वी लिहिले तसे 4, 11, 18, 25, 4, 11, 18, 25 अशी दुप्पट पदे लिहून एकुण बेरीज 4x29=116 असणार. आणि प्रत्यक्ष दिलेल्या पदावलीची बेरीज निम्मीच म्हणजे 58 होणार.

रवि–   हे अधिक सोपे झाले. पण बाबा तुम्ही सुरुवातीस सम आणि विषम संख्याची वेगळी पद्धत दिली होती. असे का?

बाबा–   या दोन वेगवेगळ्या पद्धती आहेत एवढेच. आता आपले सूत्र आपण 1/2xnx(a+l) असे लिहू शकतो किंवा nx(a+l)/2असे सुद्धा लिहू शकतो.

प्रसाद–   आले लक्षात. कारण(a+l)/2 ही सरासरी आहे जी विषम पदसंख्येच्या बाबतीत मधली संख्या असते. आणि सरासरीस पदसंख्येने गुणले की बेरीज येते. याउलट पदसंख्या सम असेल तर (a+l) ही पहिल्या आणि शेवटच्या पदांच्या जोडीची बेरीज आणि1/2xn ही मूळ पदावलीतील एकुण जोडयांची संख्या. तेंव्हा पहिली पद्धत काय अगर दुसरी पद्धत काय, सूत्र तेच राहिले.

3. जादुई आयत आणि चौरस

बाबा–   एखादी पुन्हा पुन्हा घडणारी किंवा दिसणारी संकल्पना असेल तर आपण तिला काय म्हणतो?

सुशीला– आपण तिला आपण नमुना किंवा अभिरचना (pattern) म्हणतो.

बाबा–   दिलेल्या छोटया छोटया चौरसंचा एक मोटा आयत कसा बनविता येईल?

सुशीला– हे पहा छोटे चौरस. मी त्यांचा असा आयत बनवीन.

बाबा–	छान. अशा चौरसांनी बनलेल्या आयताच्या प्रत्येक चौरसात किंवा कोशात (cell) आपण एक आकडा लिहू. या आयताकृति आकृतीतील प्रत्येक रांगेत आणि स्तंभात सारखेच कोश आहेत. हे कोश जर आपण एकेक आकडा घालून भरले तर मिळणाऱ्या आकृतीस आयताकृति तक्ता किंवा सारिणी असे म्हणू.

सुशीला– ही पहा, दिनदर्शिकेत दिसणारी एक आयताकृती सारिणी (matrix):

2	3	4	5
9	10	11	12

बाबा–	हिला आपण 2x4 सारिणी असे म्हणू कारण या सारिणीत दोन रांगा आणि चार स्तंभ आहेत. या संख्यांमध्ये तुम्हाला काही विशेष गुण किंवा जादु आहे असे वाटते काय?

सुशीला– समजले. आता या सारिणीच्या प्रत्येक तिरक्या स्तंभातील 2+12, 3+11, 4+10, 5+9 अशा सर्व संख्यांची बेरीज कायम चौदा येते म्हणून या आयतास जादुई आयत म्हणता येईल. बरोबर?

रवि–	आता मी या दिनदर्शिकेतला दुसरी एक सारिणी दाखवतो.

1	2	3
8	9	10
15	16	17
22	23	24
29	30	31

ही 5x3 सारिणी आहे ना? कारण येथे पाच रांगा आणि तीन स्तंभ आहेत.

बाबा–	बरोबर. या सारिणीची काय जादु आहे? एका वेळी फक्त दोन रांगा घेऊन त्यात वेगवेगळ्या रितीने बेरजा पहा. जशा पहिल्या दोन रांगात 1+10=11, 3+8=11, 2+9=11.

तसेच दुसऱ्या आणि तिसऱ्या रांगेतील बेरजा पहाः 8+17=25, 9+16=25, 10+15=25.

पुढे जाऊन आणखी दोन दोन रांगा घेऊन पहा.

15+24=39, 16+23=39, 17+22=39

22+31=53, 23+30=53, 24+29=53

प्रसाद–	आणखी गम्मत म्हणजे 11, 25, 39, 53 या क्रमाने येणाऱ्या जादुई बेरजासुद्धा 14 या फरकाने गणितश्रेणीत वाढतायत असे दिसते.

रवि–	मी आता सारख्याच रांगा आणि स्तंभ असणारा आयत म्हणजे चौरस घेतो. हा पहा.

5	6	7
12	13	14
19	20	21

बाबा–	छान. चौरस सारिण्यातर विशेष प्रकारच्या असतात. पण आपण ते आज नाही, उद्याच्या बैठकीत घेऊ.

सुशीला– मग मी एक भला मोठा आयत घेते.

2	3	4	5	6	7
9	10	11	12	13	14
16	17	18	19	20	21
23	24	25	26	27	28

बाबा–	या सारिणीचा आकार कोणता?

सुशीला– हिच्या चार रांगा आणि सहा स्तंभ आहेत.

बाबा– म्हणजे हिचा आकार 4x6 असा आहे. ठीक. या सारिणीत सापडतील त्या सर्व जादुई बेरजा कर बरे.

सुशीला– 2=28=30, 9+21=30, 3+27=30, 10+20=30, 4+26=30, 11+19=30, 5+25=30 12+18=30, 6+24=30, 13+17=30, 7+23=30, 14+16=30

प्रसाद– जर आपण या सारिणीतील लहान लहान आयताकृति उपसारिण्या घेतल्या तर अधिक जादुई बेरजा मिळतील.

बाबा– ते बरोबर आहे. पण सध्या येवढेच पुरे. बाकी आपण उद्या पाहू.

4. अपूर्ण जादुई सारिण्या

प्रसाद– आता आज आपण चौरस सारिण्या पाहणार आहोत.

बाबा– आधी सुशीलेस एक सारिणी निवडू दे.

रवि– कोणत्या आकाराची?

बाबा– आपण सुरुवातीस अगदी लहान म्हणजे 2x2 आकाराची सारिणी घेऊ.

सुशीला–

1	2
8	9

3	4
10	11

ह्या दोन सारिण्या घेतल्या.

रवि– मग आणखी दोन का नकोत? ह्या घे, मी निवडलेल्या.

10	11
17	18

20	21
27	28

बाबा– या सर्व सारिण्या आपल्याला हव्या तशाच आहेत. आता यातील जादु काय ते पहा.

1+9=10	3+11=14	10+18=28	20+28=48
2+8=10	4+10=14	11+17=28	21+27=48

प्रसाद– येथे फक्त कर्णावरील आकडयांची बेरीज समान आहे. रांगा किंवा स्तंभ यातील बेरजा मात्र वेगवेगळ्या आहेत. आता आपण 3x3 किंवा तिसऱ्या कोटीच्या सारिणीचे (third order matrix) स्वरूप पाहू.

रवि– ही पहा एक मी सारिणी बनविली आहे.

1	2	3
8	9	10
15	16	17

कर्णावरील आकडयांची बेरीज 1+9+17=27 आणि 3+9+15=27 अशी समानच येते.

बाबा–	शिवाय मधली रांग पहा.

सुशीला– 8+9+10=27. मधल्या रांगेची बेरीज पण कर्णाएवढीच आहे. आता मधला स्तंभ पाहते. 2+9+16=27. वा. ही सुद्धा बेरीज तेवढीच आली. ही तिसऱ्या कोटीची सारिणी जास्त मजेदार आहे. पण पहिल्या आणि तिसऱ्या रांगेत हीच बेरीज आली असती तर अधिक मजा वाटली असती. आणि पहिला आणि तिसरा स्तंभही तसाच असायला हवा होता.

बाबा–	पण मग अशा चौरसास आपण अपूर्ण न म्हणता पूर्ण जादुई चौरस म्हणालो असतो.

रवि–	अच्छा. म्हणून आपला चौरस अपूर्ण जादुई आहे होय? बाबा पण मला या अपूर्ण जादुई चौरसाचा एक गुण लक्षात आला आहे. सर्व कर्ण, मधली रांग आणि स्तंभ यांची बेरीज मधोमध असलेल्या कोशातील संख्येची तिप्पट असली पाहिजे.

प्रसाद–	हे याच चौरसात आहे की सर्व चौरसात असणार? मी आणखी एक दिनदर्शिकेतला चौरस पाहातो.

12	13	14
19	20	21
26	27	28

इथे मधली संख्या 20 आहे. आणि हा तिसऱ्या कोटीचा चौरस आहे. म्हणजे जादुई बेरीज 20x3=60 असायला हवी. कर्णावरील संख्यांची बेरीज 12+20+28=60 आणि 14+20+26=60 अशीच येते.

सुशीला– मधल्या रांगेची बेरीज 19+20+21=60 आहे आणि मधल्या स्तंभाची बेरीज 13+20+27=60 च आहे.

प्रसाद–	हे फारच आश्चर्यकारक आहे. आता आपण एखादा चौथ्या वर्गाची सारिणी बघायची काय?

बाबा–	होय. पण आता हे लक्षात असु द्या की दिनदर्शिकेत पुढे जाऊन पाचव्या अगर सहाव्या वर्गाचा चौरस मिळणार नाही. तसे हवेच असेल तर आपल्याला 31 तारखेपर्यंत थांबुन चालणार नाही. आणि 31 तारखेच्या पुढे जायचे असे ठरविले तरी पुन्हा एका ठिकाणी थांबावेच लागेल. ती मर्यादा कोणती हे आले का लक्षात?

रवि–	ते कसे सांगता येईल? आधी तुम्ही कुठे थांबणार हे तर कळायला हवे ना?

सुशीला– दिनदर्शिकेत आठवड्याचे सात दिवस आहेत म्हणजे सातच स्तंभ आहेत. तेंव्हा रांगा सात पेक्षा जास्त घेऊन काही उपयोग नाही. म्हणजे सातव्या वर्गाची सारिणी हीच मर्यादा असणार.

प्रसाद–	फारच उत्तम. बाबा, हे बरोबर ना?

बाबा–	अर्थातच. आता आपण आपली ऑगस्ट 2004 या महिन्याची दिनदर्शिका पाहू आणि त्यातला हवा तसा चौथ्या कोटीचा चौरस घेऊ.

रवि–

4	5	6	7
11	12	13	14
18	19	20	21
25	26	27	28

ही पहा मी घेतलेली दिनदर्शिकेतील चोथ्या कोटीची सारिणी.

सुशीला– 4+12+20+28=64, 7+13+19+25=64,

प्रसाद-	5+6+26+27=64, 11+14+18+21=64, 12+13+19+20=64, 4+7+25+28=64.

बाबा–	मुलांनो, तुम्ही काय करताय ते तुमच्या लक्षात आले का? तुम्ही 32 बेरीज होणाऱ्या दोन दोन जोड्या घेत आहात.

प्रसाद–	होय. कालच्या जादुई आयतात अशी एकच जोडी आपण घेतली होती.

रवि–	बाबा, हाच चौरस आपणास संख्यांची अदलाबदल करून पूर्ण जादुई चौरस होईल अशी रचना करता येईल का?

बाबा–	हा फारच चांगला प्रश्न आहे. आणि आपण याचा विचार करणार आहोतच. पण जर तुम्हाला अनुमान धपक्याने आधीच संपूर्ण जादुई चौरस शोधायचा असेल तर तसे करायला माझी काहीच हरकत नाही. एक मुद्दा मात्र तुम्ही विसरलेले

दिसताय. तिसऱ्या कोटीच्या सारिणीत तुम्ही हे पाहिले की जादुई बेरीज मधल्या संख्येच्या तिप्पट होती. त्या संदर्भात या चौथ्या कोटीच्या सारिणीतली बेरीज कशी ठरणार?

प्रसाद– या बाबतीत मधला असा कप्पा नसतो. पण जर विरुद्ध टोकाच्या संख्याच्या बेरजेस दोनने गुणले तर जादुई बेरीज मिळते असे दिसते. आता हा एक चौरस पहाः

2	3	4	5
9	10	11	12
16	17	18	19
23	24	25	26

रवि– या बाबतीत जादुई बेरीज (2+26)x2=56 यायला हवी. ती तशीच येते.

सुशीला– पण मला तेच उत्तर 5 आणि 23 च्या बेरजेची, म्हणजे 28 ची दुप्पट करूनही मिळेल.

बाबा– अशाच अनेक वेगळ्या पद्धतीने हे उत्तर मिळेल.

रवि– समजा मला या जादुई चौरसातल्या सर्व संख्यांची बेरीज करायची आहे, तर काही सूत्र असेल का?

बाबा– आधी हवा तो तिसऱ्या कोटीचा चौरस घे. त्यातली पहिली संख्या मला सांग, मी लगेच सर्व संख्यांची बेरीज सांगू शकेन.

सुशीला– मी एक चौरस निवडला आहे आणि तो 12 या संख्येपासून सुरु होतो.

बाबा– मग बेरीज 180 येणार.

सुशीला– पाहू या.

12	13	14
19	20	21
26	27	28

यातील स्तंभांची बेरीज 57, 60 आणि 63 येते. आणि या तीन संख्यांची बेरीज बरोबर 180 येते.

रवि– म्हणजे मधल्या संख्येस 9 ने गुणायचे असेच ना?

सुशीला– पण मी पहिली संख्या दिली होती, मधली नाही.

रवि– हं. म्हणजे पहिल्या संख्येत आठ मिळवायचे आणि मग येणाऱ्या उत्तरास 9 ने गुणायचे. बरोबर?

प्रसाद– फारच छान. पण मग पहिली ऐवजी पहिल्या रांगेतली शेवटची संख्या दिली तरी चालेल. फक्त या बाबतीत त्या संख्येत सहा मिळवायचे आणि मग 9 ने गुणायचे.

बाबा– आता तुम्हाला या खेळाचे रहस्य उलगडले आहे. छान, छान.

प्रसाद– आता चौथ्या कोटीच्या चौरसाकडे पहायला हरकत नाही. आता मला एका चौथ्या कोटीच्या चौरसाची पहिली संख्या सांगा आणि मी एकुण बेरीज ओळखण्याचा प्रयत्न करतो.

सुशीला– मी निवडलेल्या चौथ्या वर्गाच्या चौरसातली पहिली संख्या 4 आहे.

प्रसाद– मग उत्तर 256 येईल.

सुशीला– करून पाहते.

4	5	6	7
11	12	13	14

18	19	20	21
25	26	27	28

येथे स्तंभांच्या बेरज; 58, 62, 66 आणि 70 आहेत. या चार संख्यांची बेरीज नेमकी 256 येते खरी.

रवि– थांब, मला या कोडयाचे उत्तर शोधु दे. 4 पासून सुरु होणाऱ्या चौरसात कर्णावरच्या संख्या आठने वाढतात हे मला ठाऊक आहे. आता आठ त्रिक चोविस जर चारात मिळविले तर 28 ही शेवटची संख्या असणार. 4 आणि 28 या विरुद्ध संख्यांची बेरीज 32 झाली. या संख्येची दुप्पट म्हणजे 64 ही या चौरसातली जादुई बेरीज आहे. आणि सर्व संख्यांची बेरीज याच्या चौपट म्हणजे 256 असणार.

प्रसाद– हे अगदी बरोबर आहे.

5. क्रॉसचे कोडे

बाबा– दिनदर्शिकेतील संख्या–रचनेतून आपणास काही क्रांसच्या आकाराची कोडी बनविता येतात.

सुशीला– आता आम्हाला तसले एखादे क्रॉसचे एक कोडे द्या. आम्ही ते सोडवू.

बाबा– एक तीन संख्यांचा स्तंभ आणि तीनच संख्यांची रांग यांना समाईक असा मधला कोश एवढा आकार असल्यास त्या आकृतीस आपण तिसऱ्या कोटीचा क्रॉस असे म्हणू. हा क्रॅास अशा पद्धतीने भरायचा की उभी आणि आडवी बेरीज सारखीच येईल.

सुशीला– दिनदर्शिकेत अशी मला दोन तरी उदाहरणे चटकन दिसतात.

	3				13	
9	10	11	आणि	19	20	21
	17				27	

बाबा– छान. आता जर मी म्हटले की बेरीज 42 हवी, तर दिनदर्शिकेत तुम्हाला तसा क्रॅास शोधता येईल का?

रवि– आधी मधली संख्या 42/3 म्हणजे 14 असायला हवी. आता त्या वरची संख्या 7 आणि खालची 21 हवी कारण स्तंभातल्या संख्या सातने वाढतात. तसेच रांगेत एकचा फरक असतो म्हणजे मधल्या संख्येच्या डावीकडे 13 आणि उजवीकडे 15 हवेत. म्हणजे तो क्रॉस असा असणार.

	7	
13	14	15
	21	

प्रसाद– अर्थात दिनदर्शिकेत मधली संख्या दिली की वर खाली सातचा फरक तर डावी–उजवीकडे एकचा फरक हवा. पण दिनदर्शिका न घेता इतर ठिकाणी वेगळी उत्तरे असू शकतात. उदाहरणार्थ याच 14 या मधल्या संख्येसोबत वरची–खालची संख्या तीनच्या फरकाने 11 आणि 17 घेता येईल. आणि डावी–उजवीकडे दोनच्या फरकाने 12 आणि 16 घेता येईल. आणि हा क्रॉस असा असेल.

	11	
12	14	16
	17	

रवि– आता आपण वेगळ्या कोटीचा क्रॉस घ्यावा का?

प्रसाद– आपण तीन नंतर पाचव्या कोटीचा क्रॉस घेउ शकतो. मधली संख्या नसल्यामुळे चोथ्या कोटीचा क्रॉस नसणार. पाचव्या कोटीचा क्रॉस असा दिसेलः

सुशीला– दिनदर्शिकेतील संख्यांमध्ये अशा क्रॉसचे कोडे मला नाही जमायचे.

रवि– बरोबर. पण मला बेरीज किंवा मधली संख्या दे आणि मी बनवीन पाचव्या कोटीचा क्रॉस.

प्रसाद– ठीक. बेरीज 55 दिली.

रवि– म्हणजे मधली संख्या 55 च्या एकपंचमांश किंवा 11 आली. आता वर दोन दोन कमी करून 9 आणि 7 घ्यावेत. आणि रांगेत तीन चा फरक ठेवून 8 आणि 5 डावीकडे तर 14 आणि 17 उजवीकडे. म्हणजे उत्तर असे येईल.

		7		
		9		
5	8	11	14	17
		13		
		15		

रवि– मला दुसरीच एक रीत सुचतेय. आपण दोन गणितश्रेणीतल्या पाच पाच संख्या अशा घ्याव्या की दोघांची मधली संख्या समान असेल.

बाबा– फार सुंदर कल्पना आहे. आता आपण आपले कोडे वेगळ्या पद्धतीने मांडू. पाच सलग संख्या, उदाहरणार्थ, 25, 26, 27, 28, 29 अशा दिल्या. त्यांचा उपयोग करून तिसऱ्या कोटीचा क्रॉस बनवाल का?

रवि– मधली संख्या 27 मधोमधच्या कोशात घ्यायला हवी. मग क्रॉस असा बनेल.

	26	
25	27	29
	28	

प्रसाद–रवि तू भलताच हुषार आहेस. तुझा मुद्दा माझ्या लक्षात आला. आपण जर फरक एक आणि दोन चा घेतला तर पाच सलग संख्या वापरून आपणास जादुई क्रॉस बनविता येईल. पण त्या पाच संख्या सलगच हव्या असे काही नाही. त्या गणितश्रेणीत 7, 11,15,19,23 अशा सुद्धा असायला हरकत नाही.

सुशीला– मी प्रयत्न करून पाहते.

	11	
7	15	23
	19	

जमलं मलासुद्धा.

6. ताऱ्याचे कोडे

बाबा– आपण क्रॉसची कोडी पाहिली. आता आपण ताराकृति कोडी पाहू. हे पुढील चित्र दुसऱ्या कोटीच्या ताऱ्याचे आहे. येथे जर कर्णावरील बेरजा सारख्या हव्या असतील तर काय करावे लागेल?

सुशीला– दिनदर्शिकेतील संख्यांच्या आधारे हे तर सोपेच आहे. हा एक तारा पहा ज्यात बेरीज दहा येते.

1	2
8	9

रवि– जर तुम्ही मला बेरीज काय हवी ते सांगितले तर मी तसा तारा शोधीन.

बाबा–मला 28 बेरजेचा तारा हवा आहे.

रवि– 28 ही संख्या दोन संख्यांची दोन पद्धतींनी बेरीज यायला हवी. 28=20+8, 28=12+16.

म्हणजे तारा असा मांडता येईल.

8 12

16 20

बाबा– 20 आणि 8 ही 28 बेरजेसाठी जशी पूरक जोडी आहे तशीच 12 आणि 16 ही पूरक जोडी आहे, अशा शब्दात हे वर्णन करता येईल.

सुशीला– पण या जोडया पूरक असल्या तरी दिनदर्शिकेतल्या नाहीत. तेंव्हा दिनदर्शिकेत जोडया हव्या असतील तर त्या

3 4 10 11

24 25 17 18

अशा घ्याव्या लागतील.

रवि– आधी केला तसा चार सलग संख्या घेऊन हे कोडे सोडवायचा विचार करावा का?

सुशीला– समजल. मग चार सलग आकडयांचा असा तारा बनविता येईलः

1 3

2 4

म्हणजे मध्यापासून सारख्या अंतरावरच्या जोडया घ्याव्या लागतील.

प्रसाद– छान. आता आपण तिसऱ्या कोटीचा तारा कसा बनवावा हे पाहू.

रवि– ही तर तिसऱ्या कोटीच्या जादुई चौरसातली मधली संख्या काढून टाकली की मिळणारी आकृति आहे.

प्रसाद– बाबा, असं म्हणता येईल का, की ताऱ्याची कोटी म्हणजे त्या आकृतीत आवश्यक अशा पूरक जोडयांची संख्या?

बाबा– निश्चीतच असं म्हणायला हरकत नाही. आता पहा, मी तुम्हाला 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 अशा आठ सलग संख्या देतो. आता या संख्या वापरून चौथ्या कोटीचा जादुई तारा तुम्हाला बनविता येईल का?

रवि– सारख्या अंतरावरच्या पूरक जोडया आहेत (3,10), (4,9), (5,8), (6,7). मग असा तारा बनेलः

4

3 5

7 6

8 10

9

प्रसाद– 3, 4, 5, 6 या चार सलग संख्या या ताऱ्यात सलग कोशात आहेत आणि 7, 8, 9, 10 या संख्या ही सलगच कोशात पण उलटया क्रमाने आल्या आहेत.

बाबा– त्या तशाच यायला हव्यात असा नियम असेल का?

रवि– असे काही वाटत नाही. कारण हा तारा असाही बनविता येईलः

9

3 5

6 7

8 10

4

प्रसाद– छान. पण मला ही उलट आणि सुलट रचना अधिक आवडली. पूर्वीप्रमाणेच आपणास आठ गणितश्रेणीतल्या संख्यांचाही तारा बनविता येईल.

7. संपूर्ण जादुई चौरस

बाबा– आता आपण रविच्या प्रश्नाकडे वळू. एका अपूर्ण जादुई चौरसातल्या संख्या वेगळ्या प्रकाराने रचून आपणास जादुई चौरस बनविता येईल का?

सुशीला– म्हणजे रांगा, स्तंभ आणि दोन कर्ण या सर्वांची बेरीज सारखी यायला हवी, असेना?

बाबा– होय. आता या कामाला तुम्ही लागा.

रवि– म्हणजे खूपच मजा येईल.

बाबा– आधी आपण दुसऱ्या कोटीचा चौरस पाहू.

सुशीला– हा चोरस आपण आधी पाहिलेला आहेः

1	2
8	9

पण हा संपूर्ण जादुई चौरस करता येईल असे वाटत नाही.

रवि– होय. सुशीला म्हणते ते बरोबर आहे. या संख्यांचा संपूर्ण जादुई चौरस बनणे अशक्य आहे.

प्रसाद– मग आता आपण तिसऱ्या कोटीचा चौरस घेऊ.

1	2	3
8	9	10
15	16	17

सुशीला– मी तपासून पाहते.

8+9+10=27, 2+9+16=27, 17+9+1=27, 3+9+15=27.

रवि– हे सगळ तू धडाधड करतेस.

सुशीला– तस काही नाही. हा तर दिनदर्शिकेतल्या गणितश्रेणीतल्या संख्यांचा चौरस आहे. म्हणजे या सर्व बेरजा मधल्या संख्येच्या तिप्पट असणार हे आपण आधीच पाहिले आहे.

रवि– मग ही जादुई बेरीज 27 यायला हवी. आता या संख्यांची अदलाबदल कशी करायची? बाबा आम्हाला काही मदत करा ना.

बाबा– तुम्हाला अनुमान धपक्याने हे करता येईल पण त्याला खूपच वेळ लागेल. पण सोपे करण्यासाठी एक अशी संरचना आहे जी या सारिणीत लपलेली आहे. ती आधी समजून घ्यायला हवी. आता आधी विचार करा की 1, 2, 3, पासून 8, 9, 10 या संख्या कशा मिळतात?

सुशीला– 1, 2, आणि 3 या आकडयांत प्रत्येकी 7 मिळवून 8, 9, आणि 10 हे नवे आकडे मिळतात.

रवि– तशाच 1, 2, 3 मध्ये प्रत्येकी 14 मिळवून 15, 16, 17 या संख्या मिळतात.

बाबा– आणि 1, 2, 3 पासून 1, 2, 3 या संख्या कशा मिळतात?

सुशीला– म्हणजे काय हो बाबा? त्यातर काहीच न मिळवता, किंवा 0 मिळवून या संख्या मिळतात.

बाबा– म्हणजे आपणास दोन वेगळे अशे चौरस बनवायला हवेत, ज्यांना लॅटिन चौरस म्हणतात. त्यातला एक 1, 2, 3 या संख्या घेऊन आणि दुसरा 0, 7, 14 या संख्या घेऊन बनवायचा आहे.

प्रसाद– ही लॅटिन चौरस काय भानगड आहे?

बाबा– मी तेच सांगणार होतो. लॅटिन चौरसाच्या प्रत्येक रांगेत आणि स्तंभात त्याच संख्या असतात पण अशा तऱ्हेने मांडलेल्या असतात की एका रांगेत अगर स्तंभात कुठलीही संख्या एकदाच आली पाहिजे.

रवि– आणि मग कर्णाचे काय?

बाबा– आपण कर्णाचा विचार तूर्त सोडुन देऊ. एखादी संख्या कर्णावर अधिक वेळा आली तरी चालेल.

सुशीला– रांगा आणि स्तंभांची बेरीज सारखी यावी लागेल काय?

बाबा– होय. पण कर्णावरील बेरजेचा मात्र सध्या विचार नको.

रवि– दुसऱ्या वर्गाचा लॅटिन चौरस अगदीच सोपा आहे. हा पहाः

1 2

2 1

सुशीला– मी तिसऱ्या वर्गाचा लॅटिन चौरस बनविणार आहे. आधी 1, 2, 3 या संख्या कर्णावर मांडते.

1		
	2	
		3

मग बाकी संख्या प्रयत्न करत आणि चुकत माकत जमतील.

1	3	2
3	2	1
2	1	3

हे काय, जमलच मला.

रवि– आता मी 0, 7, आणि 14 यांचा असाच लॅटिन चौरस बनवितो.

0	14	7
14	7	0
7	0	14

सुशीला– बाबा, रविने अगदी माझ्याच सारखा चौरस बनविला आहे.

प्रसाद– हो, खर आहे ते. त्याने 1 च्या ठिकाणी 0, 2 च्या ठिकाणी 7 आणि 3 च्या ठिकाणी 14 अशी मांडणी केली आहे.

बाबा– छान. आता एक नवीन चौरस बनवायचा, ज्यातल्या संख्या संबद्ध (corresponding) संख्यांच्या बेरजा असतील.

सुशीला– म्हणजे तुम्ही म्हणताय की

1+0	3+14	2+7
3+14	2+7	1+0
2+7	1+0	3+14

अशी बेरीज करावी.

1	17	9
17	9	1
9	1	17

रवि– असाच आणखी एक लॅटिन चौरस बनवायचा का बाबा?

बाबा– आता 0, 7 आणि 14 चा वेगळ्या पद्धतीने लॅटिन चौरस बनवून मग दोन चौरसातल्या संबद्ध संख्यांची बेरीज करून काय होते ते पहा.

प्रसाद– मला प्रयत्न करू दे. आधी सुशीलेने डावीकडून उजवीकडे जाणारा कर्ण भरला होता. मी आता उलट जाऊन पाहतो.

		0
	7	
14		

आता संपूर्ण चौरस बनविता येईल तो असाः

7	14	0
0	7	14
14	0	7

रवि– आता मी बेरजा करून लॅटिन चौरस बनवितो.

8	17	2
3	9	15
16	1	10

पण हा काही लॅटिन चौरस नाही. कारण सर्व संख्या वेगवेगळ्या आहेत. हा जादुई चौरस तर नसेल ना?

प्रसाद– बरोबर आहे. आणि हे सर्व आकडे तर दिनदर्शिकेतल्या आपण सुरुवात केलेल्या चौरसातलेच आहेत. फक्त वेगळी रचना करून लिहिलेले. पण हा अपूर्ण की संपूर्ण जादुई चौरस बरे?

सुशीला– मी तपासते.

8+17+2=27, 16+1+10=27, 8+3+16=27, 2+15+10=27, 3+9+15=27, 17+9+1=27, 8+9+10=27, 2+9+16=27. वा, वा. हा तर संपूर्ण जादुई चौरस झाला.

बाबा– एवढेच पाहू नकोस. हे सर्व तर आहेच. पण या चौरसात आणखीही काही नवे गुण आहेत.

सुशीला– ते कोणते बाबा?

बाबा– प्रतेक कोशातल्या संख्येचा वर्ग करून त्याच कोशात लिहून पहा, काय होते ते.

रवि– हे काम मी करतो.

64	289	4
9	81	225
256	1	100

प्रसाद– हा सुद्धा जादुई चौरस असू शकेल काय? हा संपूर्ण जादुई चौरस नाही हे माझ्या लक्षात आले आहे. पण कदाचित हा आणखी वेगळ्याच प्रकारचा अपूर्ण चौरस आहे असे दिसते.

बाबा– म्हणजे तुला नेमक काय म्हणायचय?

प्रसाद–	येथे मधली रांग (315), मधला स्तंभ(371) आणि दोन कर्ण (245, 341) यांच्या बेरजांऐवजी कडेच्या दोन रांगातली बेरीज 357 तर कडेच्या दोन स्तंभात वेगळीच बेरीज 329 येते आहे.

बाबा–	पण आपल्याला एकच संख्या (64+9+256=4+225+100=329, 64+289+4=256+1+100=357)दोन वेगळ्या पद्धतीने तीन वर्गांची बेरीज म्हणूनही लिहिता येते ना?

रवि–	हो. ही मात्र एक वेगळीच गंमत आहे.

प्रसाद–	चोथ्या कोटीच्या चौरसातही आपल्याला अपूर्ण चौरसातून संपूर्ण जादुई चौरस बनविता येईल काय?

बाबा–	नक्कीच ते तुम्हाला जमेल.

प्रसाद–	बाबा हे पहा.

1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25

आता 1, 2, 3, 4 या संख्या आणि पूर्वी प्रमाणे 0, 7, 14, 21 या संख्या घ्यायच्या ना? त्यांना काय नाव आहे?

बाबा–	1, 2, 3, 4 यांना प्राथमिक संख्या आणि 0, 7, 14, 21 यांना आपण पायाभूत संख्या असे म्हणू.

प्रसाद–	आधी आपण प्राथमिक संख्यांचा लॅटिन चौरस बनवू. म्हणजे मग पायाभूत संख्यांचा लॅटिन चौरस बनविता यईल.

सुशीला–	पण इथे मधला कोशच नाही. मग कशी सुरुवात करायची?

रवि–	मी प्रयत्न करून पाहतो.

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

प्रसाद–	हे छान आणि झटपट काम झालय. या चौरसात 4 ही संख्या उजवीकडून डावीकडे खाली जात आहे. तेंव्हा 0, 7, 14, 21 या पायाभूत संख्याचा लॅटिन चौरस डावीकडून उजवीकडे खाली जाणारी स्थिर संख्या घेऊन बनवावा.

21	0	7	14
14	21	0	7
7	14	21	0
0	7	14	21

यातल्या पहिल्या प्राथमिक संख्यांच्या चौरसात 1, 2, 3, 4 हे पहिल्या रांगेत तर पायाभूत संख्यांच्या चौरसात 0, 7, 14, 21 या संख्या शेवटच्या रांगेत आहेत. आता या दोन चौरसातून संपूर्ण जादुई चौरस बनतो का ते पाहुया.

रवि–	मला करू दे ते काम. मी एकदम बेरजा करूनच उत्तर लिहितो.

22	2	10	18
16	24	4	8
10	18	22	2

4	8	16	24

पण हा चौरस काही वेगळाच आहे.

सुशीला– या चौरसात तर 24, 8, 18, 10 हे सगळेच आकडे दोनदोनदा आले आहेत. शिवाय कर्णावरील संख्यांची बेरीज जमत नही. हा तर अपूर्ण जादुई चौरस सुद्धा नाही असे दिसते आहे.

प्रसाद– आणि अर्थातच हा लॅटिन चौरस सुद्धा नाही. बाबा, हे काम काही जमत नाही.

बाबा– मुलांनो लॅटिन चौरस बनविण्याचे वेगवेगळे प्रकार आहेत. मी आधी तुम्हाला योग्य असा लॅटिन चौरस बनवून देतो. आधी 1, 2, 3, 4 या प्राथमिक संख्या घ्या. आणि असा चौरस बनवा.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

प्रसाद– हो. हा तर एक लॅटिन चौरस आहे हे खरे. जर मी दुसरा लॅटिन चौरस पायाभूत संख्यांचा 1, 2, 3, 4 या जागी 0, 7, 14, 21 घेऊन बनविला तर चालेल का?

रवि– करून पाहुया.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

या चौरसास पुढचा पायाभूत संख्यांचा चौरस मिळवायचाः

0	7	14	21

प्रसाद– थांब, घाई करू नको. आपण या दुसऱ्या लॅटिन चौरसात वेगळी रचना वापरायला हवी हे निश्चित.

रवि– बर, मग आपण नमुना बदलूया.

प्रसाद– म्हणजे अशीच संख्यांची अदलाबदल करायची म्हणतोस काय?

होय. मी पहिल्या चौरसाची दुसरी रचना अशी घ्यायची म्हणतोयः

1	3	2	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	2	3	1

आणि याच रचनेत आता पायाभूत संख्या वापरतो.

0	14	7	21
7	21	0	14
14	0	21	7
21	7	14	0

प्रसाद– छान. चला जाऊ या पुढे.

एकेका घरातल्या संख्यांची बेरीज करून आपणास हा चौरस मिळतो.

1	16	10	25
10	25	1	16
16	1	25	10
25	10	16	1

प्रसाद– हा तर फक्त लॅटिन चौरस झाला 1, 10, 16 आणि 25 या आकडयांचा.

बाबा– हे पहा, तुम्हाला मी दिलेला लॅटिन चौरस आणि त्यातील प्राथमिक संख्यांची रचना नीट तपासून पहावी लागेल.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

प्रसाद– आता माझ्या लक्षात आलॅ. हा चौथ्या वर्गाचा चौरस तोडून जर आपण चार दुसऱ्या वर्गाचे चौरस बनविले तर ते असे दिसतीलः

1 2   3 4   2 1   4 3

3 4   1 2   4 3   2 1

या प्रत्येक चौरसात कर्णाची बेरीज 5 आहे यापैकी पहिला आणि तिसरा चौरस हे आरशातील प्रतिबिंबाप्रमाणे आहेत आणि दुसरा व चौथा चौरस तसेच एकमेकाची परावर्तने आहेत. मूळ चौथ्या कोटीच्या चौरसात हे प्रतिबिंबित चौरस एकमेकाखाली आहेत.

बाबा– छान. मग जर आपणास 0, 7, 14, 21 या संख्यांचा वेगळ्या रचनेचा चौरस बनवायचा असेल तर तो कसा बनवशील?

रवि– कर्णावरील बेरजा सारख्याच नकोत, पण रांगा आणि स्तंभ मात्र एक बेरजेच्या हव्यात, असेच का?

बाबा– 1, 2, 3, आणि 4 या संख्यांची समान अंतरीय रचना लक्षात असु दे. त्यामुळेच कर्णावरील बेरजा समान येतात.

प्रसाद– म्हणजे आम्ही (0, 21) आणि (7, 14) अशा जोडया लक्षात ठेवाव्यात.

रवि– आता आपण चार छोटे चौरसच बनवू या. ते असे बनतील ना?

0 21   7 14   21 0   14 7

21 0   14 7   0 21   7 14

बाबा– छान. आता या चौघांचा मिळून चौथ्या कोटीचा लॅटिन चौरस कसा बनवाल?

प्रसाद– आपण दोन दोन चौरस तिरके बसवायला हवेत. म्हणजे आधी आकृति

0	21		
21	0		
		21	0
		0	21

अशी बनेल. आणि संपूर्ण चौरस

0	21	14	7
21	0	7	14
7	14	21	0
14	7	0	21

असा बनेल आणि याची 1, 2, 3, 4 यांच्या चौरसाशी बेरीज करून

1	23	17	11
24	4	8	16
9	15	25	3
18	10	2	22

असा चौरस मिळतो.

प्रसाद– बाबा, मिळाला संपूर्ण जादुई चौरस. यात सर्व रांगा, स्तंभ आणि कर्णांची बेरीज 52 आहे. बाबा, पण एक शंका आहे. दिनदर्शिकेत सात दिवसाचा आठवडा असतो म्हणून पायाभूत संख्या 0, 7, 14, 21 अशा येणार आणि सलग संख्या 1, 2, 3, 4 अशा येणार. पण सात ऐवजी दुसऱ्या संख्येच्या पटी घेऊन संपूर्ण जादुई चौरस बनवता यायला पाहिजे नाही का? म्हणजे 0, 6, 12, 18 किंवा 0, 4, 8, 12 अशा संख्यासुद्धा घेता यायला हव्यात.

बाबा– का नाही येणार? करून पहा.

सुशीला– मी तिसऱ्या कोटीचा चौरस बनवीन. 1, 2, 3 आणि 0, 4, 8 या संख्या वापरून.

रवि– आणि मी चौथ्या कोटीचाबनवेन, 1, 2, 3, 4 आणि 0, 6, 12, 18 वापरून.

प्रसाद– चला करा सुरुवात.

सुशीला–

1	3	2
3	2	1
2	1	3

आणि

4	8	0
0	4	8
8	0	4

यांची बेरीज करून

5	11	2
3	6	9
10	1	7

हा चौरस मिळाला.आणि हा संपूर्ण जादुई चौरस आहे हे तर तोंडी बेरजा करून लगेच दिसते.

रवि– आणि मी दोन चौरस आधी बनविणार ज्यांच्या संख्या असणार आहेत 1, 2, 3, 4 आणि 0, 6, 12, 18. या दोन चौरसांची बेरीज करायची आणि पहायचे संपूर्ण जादुई चौरस मिळतो का ते.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

आणि दुसरा चौरस आहे

0	18	12	6
18	0	6	12
6	12	18	0
12	6	0	18

आणि या दोघांची बेरीज आहे

1	20	15	16
21	4	7	14
8	13	22	3
16	9	2	19

मलाही संपूर्ण जादुई चौरस मिळाला. येथे सर्व रकान्यांची बेरीज 46 आहे.

बाबा– पण एक लक्षात ठेवा. 6 च्या ऐवजी 7 चालेल अगर 8 चालेल पण 4 पेक्षा कमी संख्या म्हणजे 3 वगैरे चालणार नाही. म्हणजे प्राथमिक संख्यातली सर्वात मोठी संख्या पायाभूत संख्यातील दुसऱ्या संख्येपेक्षा लहान किंवा निदान सारखी हवी.

प्रसाद– मुद्दा लक्षात आला माझ्या. कारण नाहीतर अपूर्ण जादुई चौरस सुद्धा अर्धामुर्धाच जमेल. उदाहरणार्थ, तिसऱ्या कोटीच्या चौरसासाठी आपणास 1 2 3

3 4 5

5 6 7 अशा संख्या मिळतील.

रवि–पण मला एक छान कल्पना सुचली आहे. जर दुसरी पायाभूत संख्या शेवटच्या प्राथमिक संख्येपेक्षा मोठी अगर लहान न घेता तेवढीच घेतली तर सारिणीतल्या संख्या अशा येतीलः

1 2 3 4

5 6 7 8

9 10 11 12

13	14	15	16

प्रसाद– बाबा, आता या सलग सोळा संख्यांचा संपूर्ण जादुई चौरस कसा करायचा हे मी सांगू शकेन. प्रत्येक कर्णावरील समान अंतरावरच्या संख्यांची अदलाबदल करावी लागेल.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

हीच पद्धत वापरून दिनदर्शिकेतील चौरसातही अदलाबदल करून संपूर्ण जादुई चौरस नाही का बनविता येणार?

बाबा– करून बघ म्हणजे समजेल.

रवि– दिनदर्शिकेतला हा तुकडा आधी घ्यायचाः

1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25

हा अपूर्ण जादुई चौरस आहे. आता (1, 25), (9, 17), (4,22), (10, 16) या जोडयांची अदलाबदल केल्यावर मिळेलः

25	2	3	22
8	17	16	11
15	10	9	18
4	23	24	1

आणि हा तर संपूर्ण जादुई चौरस आहेच. सर्व रकान्यातील बेरीज 52 येते.

प्रसाद– आपण आता या संख्यांचे वर्ग घेऊन पहायचे काय?

बाबा– मी ते म्हणणारच होतो. तेंव्हा पहा काय होते ते. मोठाल्या संख्या येतील, पण हरकत नाही.

रवि– मी माझ्या गणनयंत्राने बेरजा संख्या काढतो.

625	4	9	484
64	289	256	121
225	100	81	324
16	529	576	1

625 + 4+ 9+ 484= 1122, 64+289+256+121= 730, 225+100+81+324=730, 6+529+576+1=1122.

625+64+225+16=930, 4+289+100+529=922, 9+256+81+576=922, 484+121+324+1=930.

625+289+81+1=996, 484+256+100+16=856.

येथे कडेच्या दोन रांगांची बेरीज सारखी तर मधल्या दोन रांगांची बेरीज सारखी आहे. तसेच शेवटचे दोन स्तंभ आणि मधले दोन स्तंभ यांचेही आहे. कर्णांच्या बेरजा मात्र वेगवेगळ्या.

प्रसाद– बाबा, तुम्ही म्हणालात तशा चार वर्गांच्या सारख्या बेरजा येथेसुद्धा आपणास दोन प्रकारे येथे मिळतात.

रवि– बाबा, समजा आपण वर्ग न घेता संख्यांचे घन घेतले तर काय होईल?

प्रसाद– मला तेच करून पहायचे होते आणि मी सुरुवात केली आहे.

15625	8	27	10648
512	4913	4096	1331
3375	1000	729	5832
64	12167	13824	1

15625+8+27+10648=26308, 512+4913+4096+1331=10852, 3375+1000+729+5832=10936, 64+12167+13824+1=26056.

15625+512+3375+64=19576, 8+4913+1000+12167=18088, 27+4096+729+13824=18676, 10648+1331+5832+1=17812. 15625+4913+729+1=21268, 10648+4096+1000+64=15808.

बापरे. बाबा, एकही बेरीज दुसरी सारखी दिसत नाही. हे भलतच अनपेक्षित काही तरी झालय.

बाबा– इतकी घाई करून निष्कर्ष काढू नकोस. थोडा आणखी अभ्यास करून पहा.

रवि– हं. म्हणजे आपण वेगळ्या पद्धतीने जादुई चौरस बनवावा असे दिसते. दुसरी एखादी पद्धत असेलच ना?

बाबा– चांगला प्रश्न आहे. आपल्या चौरसात आपण जशा कर्णावरच्या संख्यांची अदलाबदल केली तशीच छोटया कर्णांची कल्पना करून जे (2, 24)...

सुशीला– म्हणजे (3, 23), (8, 18) आणि (15,11) अशा जोडया घ्याव्यात ना?

रवि– म्हणजे मग आपला चौरस

1	24	23	4
18	9	10	15
11	16	17	8
22	3	2	25

असा बनेल.

सुशीला– पण तो जादुई आहे ना?

रवि– पहा की. सर्व रकान्यातल्या बेरजा आधीसारख्याच बरोबर 52 येतायत.

बाबा– मी अशी सुचना करतो की मधले दोन स्तंभ बदलून पहा काय होतय ते.

रवि– रांगा आणि स्तंभ यांची बेरीज आहे तशीच राहणार यात शंका नाही. फक्त कर्ण तपासायला हवेत. आणि तेही जमतायत कारण कर्णावरील मधल्या जोडीची बेरीज बदललेली नाही.

1	23	24	4
18	10	9	15
11	17	16	8
22	2	3	25

हा संपूर्ण जादुई चौरस जमला.

प्रसाद– आता आपल्याला या चौरसातील संख्यांचे घन घ्यायचेत होय ना बाबा?

बाबा– पहा करून.

प्रसाद–विशेष फरक पडेल असे वाटत नाही.

बाबा– खरय पण एक नवीन लक्ष देण्यासारखी गोष्ट आहे ती ध्यानात घ्या.

रवि– कोणती बाबा?

बाबा– चौरसाच्या प्रत्येक बाजूचा मध्यबिंदू घ्या व ते चार बिंदु जोडून येणारी आकृति पहा.

रवि– म्हणजे अशी आकृति ना?

1	23	24	4
18	10	9	15
11	17	16	8
22	2	3	25

बाबा– हो. तुम्हाला आकृति जमली.

सुशीला– पण याचा काय उपयोग?

प्रसाद– बहुतेक आपण मधल्या चौरसाच्या विरुद्ध बाजूंवरील संख्यांची बेरीज करावी.

बाबा– खुप हुषार आहेस. पहा करून.

प्रसाद– त्यांच्या वर्गांची आणि घनांचीसुद्धा बेरीज पहावी. कर झटपट.

सुशीला– $18^2+23^2+3^3+8^2=926$

$24^2+15^2+11^2+2^2=926$.

riv;- $18^3+23^3+3^3+8^3=18538$, $24^3+15^3+11^3+2^3=18538$.

बाबा– पहा, किती छान गुप्त खजिना सापडलाय ना? आता दिनदर्शिकेतील चौरस घेऊन त्यातल्या संख्या बदलल्या तर अस काही सापडतय का पहा.

सुशीला– बाबा मला ठाउक आहे 1 त 9 सलग संख्याची रचना बदलून कसा जादुई चौरस बनवायचा ते. 1, 5, 9 आणि 3, 5, 7 या कर्णावरील संख्या मधली रांग आणि स्तंभ यात घ्यायच्या आणि 2, 5, 8 आणि 4, 5, 6 यांचे कर्ण बनवायचे. म्हणजे असा चौरस बनतोः

8	1	6
3	5	7
4	9	2

तसाच दिनदर्शिकेतला

1	2	3
8	9	10
15	16	17

हा चौरस घ्यायचा आणि तशीच रचना करायची. पाहते जमतय का.

16	1	10
3	9	15
8	17	2

हे छानपैकी जमलय. हा संपूर्ण जादुई चौरस दिनदर्शिकेतून मिळाला आहे. कारण

16+1+10=3+9+15=8+17+2=16+3+8=1+9+17=10+15+2=16+9+2=10+9+8=27 अशी बेरीज येते.

8. स्तंभीय बेरजेचा खेळ

सुशीला– असे काही खेळ दिनदर्शिकेत नाहीत का, जिथे "हवी ती संख्या मनात धरा"... वगैरे पासून सुरुवात असते?

बाबा–   आहेत तर. आता हेच ऑगस्ट 2004 चे दिनदर्शिकेतले पान पहा.

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

आता पहिल्या स्तंभातली एक संख्या मनात धर. आणि आता दुसरी कुठलीही तिसऱ्या स्तंभातली संख्या मनात धर. या दोहोंची बेरीज कर पण मला उत्तर सांगु नकोस. एक अट आहे ती एवढीच की ही बेरीज 32 पेक्षा कमी असायला हवी कारण दिनदर्शिकेतल्या संख्या 32 पेक्षा लहानच आहेत.

सुशीला– ठीक. मी केली बेरीज आणि ती 32 पेक्षा लहान आहे.

बाबा–   आता ही बेरीज जरी मला माहित नाही तरी ती बेरीज चौथ्या स्तंभात आहे येवढे मला माहित आहे.

सुशीला– हे कस हो तुम्ही सांगु शकलात बाबा? मी पहिल्या स्तंभातली 8 आणि तिसऱ्या स्तंभातली 17 या संख्या मनात धरल्या होत्या. त्यांची बेरीज 25 ही बरोबर चौथ्या स्तंभातच आहे. पण हे कसं काढलत?

रवि–   बाबा, मी एक दुसऱ्या आणि एक चौथ्या स्तंभातली अशा संख्या घेतल्या व त्यांची बेरीज केली. ती कुठल्या स्तंभात असेल?

बाबा–   सहाव्या.

रवि–   अगदी बरोबर आहे. मी दुसऱ्या स्तंभातली 16 आणि चौथ्या स्तंभातली 4 अशा संख्या निवडल्या होत्या. आणि त्यांची बेरीज 20 ही सहाव्या स्तंभातच आहे.

सुशीला– पण मग एकाच स्तंभातल्या दोन संख्या नाही का घेता येत?

बाबा–चोथ्या स्तंभातले दोन आकडे घेऊन कर बेरीज आणि पहा ती पहिल्या स्तंभात येते की नाही.

सुशीला– बरोबर आहे. मी 11 आणि 18 घेतल्या आणि त्यांची बेरीज 29 पहिल्या स्तंभातच आहे. तसच एकच संख्या दोनदा घेतली तरी जमतंय. कारण 4 अधिक 4 ही बेरीज 8 सुद्धा पहिल्याच स्तंभात आहे.

प्रसाद–   मी पहिल्या स्तंभातली 22 ही संख्या घेतली आणि तिसऱ्या स्तंभातली 10 ही संख्या घेतली. बेरीज 32 आहे पण ती संख्या दिनदर्शिकेत नाही.

बाबा–   जर तू दिनदर्शिकेत 31 पुढेही संख्या लिहीत गेलास तर मग 32 कुठल्या स्तंभात आली असती??

प्रसाद–   तर मग बेरीज चौथ्या स्तंभात आली असती. म्हणजे मला आता नियम कळला. फक्त स्तंभ क्रमांकांची बेरीज केली की संख्यांची बेरीज ज्या स्तंभात असेल ते उत्तर येते. आणि31 पर्यंतच बेरीज हवी हे काही तसे खरे नाही. आपण जास्त संख्या क्रमाने लिहू शकतो.

बाबा–   छान निष्कर्ष काढलास.

प्रसाद–   मग मी चौथ्या स्तंभातली 11 आणि सहाव्या स्तंभातली 20 यांची बेरीज घेतली तर येणारे उत्तर 31 हे दहाव्या स्तंभात यायला हवे. पण दहा स्तंभच नाहीत.

रवि–   आणि 31 तर तिसऱ्या स्तंबात आहे.

सुशीला– आणि दहा ही संख्या सुद्धा तिसऱ्याच स्तंभात आहे.

प्रसाद–   पण दहा कोणत्या स्तंभात आहे हे न पाहता स्तंभ क्रमांक 3 हे उत्तर कसे येणार?

बाबा–   एका स्तंभातली पहिली संख्या आणि तिच्या खाली येणाऱ्या इतर संख्या यांचे काही नाते असते, ते कोणते?

रवि–   स्तंभातल्या संख्या सात च्या वाढीने येतात. म्हणजे पहिल्या संख्येत सात मिळवले की त्या स्तंभातली पुढची संख्या, तिच्यात सात मिळवले की तिसरी संख्या, असेच हे नाते आहे.

सुशीला– सातव्या स्तंभातले आकडे हे साताच्या पाढयातले आहेत.

प्रसाद– बरोबर. म्हणजे साताच्या पाढयातल्या संख्येत एक मिळविला की पहिल्या स्तंभातले आकडे येतात.

बाबा– किंवा असे म्हणता येईल की कुठल्याही दिनदर्शिकेतल्या आकडयास सातने भागल्यावर जी बाकी राहते ती त्या संख्येच्या स्तंभातली पहिली संख्या असते.

सुशीला– पण मग 4 या संख्येला सातने कसे भागायचे?

रवि– मी सांगतो. 4 ला सातने भागले की भाग 0 च्या बसतो आणि बाकी 4 च शिल्लक राहते.

प्रसाद– बरोबर आहे.

रवि– म्हणजे या स्तंभ बेरजेच्या खेळात 1 ते 7 या संख्या विशेष महत्वाच्या आहेत.

सुशीला– सात ला सातने भागल्यावर बाकी 0 असते.

बाबा– आता 0 पासून सुरुवात करून सात स्तंभात संख्या लिहा आणि पहा काय होते ते.

सुशीला–

0	1	2	3	4	5	6	
7	8	9	10	11	12	13	
14	15	16	17	18	19	20	
21	22	23	24	25	26	27	वगैरे.

आता आपल्या मुळ दिनदर्शिकेतले स्तंभ पुढे पुढे गेले आणि शेवटचा स्तंभ आता पहिला झाला.

बाबा– म्हणून आपण या नव्या सात्णीतल्या पहिल्या स्तंभास "बाकी 0" स्तंभ असे म्हणू. पुढे क्रमाने येणारे "बाकी 1 स्तंभ", "बाकी 2 स्तंभ" असे स्तंभ आहेत. यांना आपण "बाकी 1 वर्ग, बाकी 2 वर्ग", इ. इ. असेही म्हणायला हरकत नाही. कारण हे बाकी वर्ग (residue classes) फक्त स्तंभातच असतील असे काही नाही. जर आपण साताऐवजी सहाच स्तंभ ठेवले असते तर काय झाले असते?

सुशीला– मला लिहून बघु दे.

0	1	2	3	4	5	
6	7	8	9	10	11	
12	13	14	15	16	17	
18	19	20	21	22	23	वगैरे.

रवि– इथे सुद्धा बाकी 0, बाकी 1, बाकी 2 इत्यादि वर्गातल्या संख्या आहेत.

बाबा– पण इथे आपण कुठल्या संख्येने भागाकार करतो?

सुशीला– सहाने.

बाबा– आपण जर आठने भागायचे असे ठरविले असते तर एकुण बाकी 0, बाकी 1, असे किती वर्ग निर्माण झाले असते?

रवि– आठ. बाकी 0 पासून बाकी सात पर्यंत आपल्याला एकुण आठ वर्ग मिळाले असते.

बाबा– सारखीच बाकी राहील अशा संख्यांचे जे एकमेकाशी नाते असते त्याला गाउसने "एकरूपता नाते" (congruence relation) असे नाव दिले आहे. अर्थात हे नाते ज्या संख्येने भाग द्यायचा तिच्यावर अवलंबुन असते. म्हणजे सहाने भागताना 1 आणि 7 या संख्यांचे एकरूपता नाते आहे, पण 7 किंवा 8 ने भागताना तसे त्यांचे नाते नाही. गाउसचा हा नाते संबंध आपण $9 \equiv 23$ (सापेक्ष 7) असे चिन्हांकन करतो आणि "7 सापेक्ष 9 आणि 23 यांचा एकरूपता नातेसंबंध आहे" असे शब्दात म्हणतो.

प्रसाद– म्हणजे थोडक्यात 9 आणि 23 यांना 7 ने भागल्यास बाकी सारखीच राहते असा अर्थ होतो ना?

रवि– किंवा मला वाटले की 23 आणि 9 यांची वजाबाकी 14 आहे आणि ती संख्या 7 च्या पटीत आहे. म्हणून ज्या संख्या 7 सापेक्ष एकरूपता नात्यात आहेत त्यांची वजाबाकी 7 च्या पटीत असते असे म्हणावे.

बाबा–	असे तर म्हणायला काहीच हरकत नाही. आता असा विचार करा जर $a = b$ असेल तर $a+c = b+ c$ हे बरोबर आहे ना? तसेच जर $c = d$ हेसुद्धा समीकरण दिले तर $a + c = b+ d$ असे लिहिता येतेच ना? असेच आपणास एकरूपता नात्याच्या बाबतीत करता येणार नाही का?

प्रसाद–	आल लक्षात. आता $9 \equiv 23$ (सा. 7) हे दुसऱ्या स्तंभातल्या संख्यांचे नाते आहे. तेंव्हा $9 + 2 \equiv 23 + 2$ (सा. 7) लिहिता येईल. तसेच $10 \equiv 17$ हे तिसऱ्या स्तंभातले नाते. आणि $9 + 10 \equiv 23 + 17$ (सा. 7) हे पाचव्या स्तंभातले नाते होय. स्तंभीय बेरजेच्या खेळाचा हा असा अर्थ लागला.

रवि–	स्तंभीय वजाबाकीचा सुद्धा खेळ बनविता येईल का?

बाबा–	येईल तर. आता 5 - 3 याचा तू काय अर्थ लावशील?

रवि–	पाचातून तीन वजा करायचे किंवा पाचात वजा 3 मिळवायचे.

प्रसाद–	होय. संख्या वजा करणे म्हणजे संख्येची विरुद्ध संख्या मिळवणे असेच असते.

बाबा–	याचा अर्थ असा झाला की बेरजेचा विचार केला की वजाबाकीचा स्वतंत्र विचार करण्याची गरज नाही.

सुशीला–	मग बाबा, मी म्हणते स्तंभीय गुणाकाराचा सुद्धा खेळ असायला हवा. म्हणजे दुसऱ्या स्तंभातल्या 9 आणि तिसऱ्या स्तंभातल्या 3 यांचा गुणाकार सहाव्या स्तंभात असायला हवा. आणि नउ त्रिक सत्तावीस बरोबर सहाव्या स्तंभातच आहेत.

बाबा–	बरोबर आहे. कारण विचार कर, $a=b$ जर असेल तर $ac=bc$ असणारच ना? शिवाय जर $c=d$ असेल तर मग $ac = bd$ हे ही बरोबर असणारच ना? असेच एकरूपता नात्याच्या बाबतीत सुद्धा म्हणता येईल.

प्रसाद–	माझी खात्री आहे. पण आपण तपास करून ठरवू.

$8 \equiv 15$ (सा. 7) हे पहिल्या स्तंभात.

$8x2 \equiv 15x2$ (सा. 7) हे तर बरोबरच आहे.

आता $2 \equiv 9$ (सा. 7) हे दुसऱ्या स्तंभात आहे.

मग $8x2 \equiv 15x9$ (सा. 7), किंवा $16 \equiv 135$ (सा. 7). हे बरोबर आहे ना?

रवि–	135 वजा 16 म्हणजे 119 आणि ही संख्या 7 च्या पटीत आहे कारण 7x17=119. बरोबरच आहे.

प्रसाद–	आपल्याला $a^2 \equiv b^2$, $a^3 \equiv b^3$ असेही म्हणता येईल. बरोबर?

बाबा–	अगदी शंभर टक्के बरोबर.

प्रसाद–	पण मग भागाकाराचे काय? म्हणजे अपुर्णांकाने गुणणे वगैरे? जसे $a=b$ आणि $c=d$ असेल तर आपण $a/c=b/d$ असे करतो ना?

बाबा–	एकरूपता नात्यांमध्ये भागाकार करताना विशेष खबरदारी घ्यावी लागते. नाही तरी साध्या भागाकारात सुद्धा शुन्याने भाग देता येत नाही. त्यामुळे भागाकाराचा विषय आपण पुन्हा कधी तरी पुढे घेऊ.

9. दिनांक आणि वार

सुशीला–	बाबा, आपण बहुतेक वेळा अमुक तारखेला दिवस कोणता हे पाहण्यासाठीच दिनदर्शिका वापरतो. आपण जे आता बाकी 0, बाकी 1 वगैरे शिकलो त्याचा या कामात उपयोग करून तारीख आणि वार काढू शकू काय?

बाबा–	फारच चांगला प्रश्न विचारलास सुशीला. आपणास एखाद्या तारखेचा दिवस माहित असेल तर त्या तारखेच्या आधीच्या अगर नंतरच्या तारखेचा दिवस बाकी वर्ग या संकल्पनेच्या सहाय्याने निश्चितच काढू शकतो. आधी ते ऑगस्ट 2004 च्या दिनदर्शिकेचे पान समोर राहु द्या.

ऑगस्ट 2004

Sun	Mon	Tue	Wed	Thu	Fri	Sat
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

आता सांग तीन तारीख कधी येते?

सुशीला– मंगळवारी.

बाबा– तीनात सात मिळव. किती आले?

सुशीला– दहा.

बाबा– दहा तारीख कधी येते?

सुशीला– मंगळवारी.

बाबा– मग आता सांगा "सात मिळवणे" याचा दिवसावर काय परिणाम होतो?

रवि– दिवस तोच राहतो, बदलत नाही.

बाबा– ठीक. आता सांग, "सहा मिळवणे" याचा काय अर्थ होतो?

रवि– म्हणजे आदला दिवस.

बाबा– आणि "आठ मिळवणे" याचा काय अर्थ होतो?

रवि– म्हणजे पुढचा दिवस असे होईल.

बाबा– आणि "एक मिळवणे" म्हणजे काय?

रवि– त्याचा सुद्धा अर्थ पुढचा दिवस असाच होईल.

प्रसाद– आठ मिळवणे आणि एक मिळवणे हे सारखेच आहे म्हणजे एक आणि आठ यांचा 7 सापेक्ष "बाकी 1" हा नातेसंबंध महत्वाचा आहे असे दिसते.

रवि– हा नमुना आता माझ्याही लक्षात आला. 1, 9 17, 25 या संख्या मागचीत 8 मिळवून येतात. आणि म्हणजेच 1 तारखेस रविवार तर 9 तारखेस सोमवार, 17 तारखेस मंगळवार, 25 तारखेस बुधवार असे दिवस येणार. ते या दिनदर्शिकेत दिसतेच आहे.

सुशीला– मलाही हे समजले. 6, 12, 18, 24 या संख्या सहाने वाढीव आहेत. सहा मिळवणे म्हणजे मागचा दिवस हे आपण पाहिले. आता 6 तारखेस शुक्रवार तेंव्हा 12 तारखेस गुरुवार, 18 तारखेस बुधवार आणि 24 तारखेस मंगळवार हे जमले.

प्रसाद– होय सुशीला, तू घेतलेल्या 6, 12, 18, 24 चा "बाकी" वर्ग 6, 5, 4, 3 असा आहे. म्हणून त्या तारखांना येणारे दिवस उलट्या क्रमाने आले आहेत.

सुशीला– हे फारच मजेदार आहे.

बाबा– नउ तारखेस कोणता दिवस येतो?

सुशीला– सोमवार.

बाबा– मग आणखी 11 दिवसांनंतर कोणता वार येणार?

सुशीला– 9+11=20. आणि 20 तारखेला शुक्रवार आहे.

रवि–	पण दिनदर्शिकेत न पाहता आपण हे लक्षात घ्यायला हवे की 9 चा बाकी वर्ग 2 आहे आणि 11 चा बाकी वर्ग 4 आहे. तेंव्हा 9+11 चा बाकी वर्ग 2+4=6 येणार. आणि 6 तारखेस तर शुक्रवार आहे. म्हणून 20 तारखेसही शुक्रवारच येणार.

प्रसाद–	15 तारखेस रविवार आहे. मग 23 दिवसांनी कोणता वार येणार?

सुशीला–	23 चा बाकी वर्ग 2 आहे. म्हणजे रविवारनंतर दोन दिवस किंवा मंगळवार आला.

रवि–	मी पाहतो. 15+23=38. आता 38=31+7 म्हणजे ही तारीख 7 सप्टेंबर झली. आणि सप्टेंबर महिन्याच्या सात तारखेला बरोबर मंगळवारच आहे.

प्रसाद–	पण मग याचा अर्थ असा झाला की एका ऑगस्ट 2004 च्या दिनदर्शिकेतल्या पानावरून बाकी वर्गाचे गणित करून वर्षातल्या इतर कोणत्याही तारखेचा दिवस मिळू शकेल. बरोबर आहे ना बाबा?

बाबा–	अरे एका वर्षाचेच काय घेऊन बसलास? इतर कोणत्याही वर्षातील कोणत्याही महिन्यातल्या कोणत्याही तारखेचा दिवस काढता येईल. फक्त ते ग्रेगेरियन दिनदर्शिकेतले वर्ष हवे. तुम्हाला ज्युलियन आणि ग्रेगेरियन दिनदर्शिका लक्षात आहेत काय?

रवि–	होय. तुम्ही आम्हाला ते एकदा सांगितले होते. पण बाबा, आपण या ऑगस्ट 2004 च्या महिन्यापासूनच सुरुवात करावी असे काही नसणार ना? दुसऱ्या कुठल्याही महिन्यापासून सुरुवात करता आली असती ना?

बाबा–	होय. फक्त पुढे तसेच मागे जायची तयारी पाहिजे. नाही तरी "बाकी वर्गा"च्या संख्यांची बेरीज तशी वजाबाकी करता येते हे आधी पाहिलेच आहे. तेंव्हा रवि म्हणतो तसे करण्यात काहीच अडचण नाही. आपण उदाहरण घेऊन पाहूच.

सुशीला–	17 सप्टेंबरला शुक्रवार आहे. मग 11 दिवसांपूर्वी कोणता वार असेल? 17-11=6. आणि 6 तारखेस सोमवार आहे. पण आपण हे बाकी वर्ग वापरून करायचे आहे. 17 चा बाकी वर्ग 3 आहे आणि 11 चा बाकी वर्ग 4 आहे. आता आपणास 3-4 ही वजाबाकी करायची आहे. पण 3 आणि 10 चा वर्ग एकच आहे. म्हणून 3-4 ऐवजी 10-4=6 असेही करता येईल. आणि 6 चा वर्ग दिवस सोमवार आहे. तेंव्हा हे जमले आहे यात शंका नाही.

रवि–	आता मी दिनदर्शिकेतले वेगळेच पान पाहून सांगतो की 6 जूनला रविवार आहे. तर त्यापूर्वी 40 दिवस कोणता वार असेल?

सुशीला–	40 चा बाकी वर्ग 5 आहे. आणि 6-5=1.

प्रसाद–	जूनच्या 1 तारखेस मंगळवार आहे. म्हणजे 6 जूनच्या 40 दिवस आधीसुद्धा मंगळवारच असणार. अर्थात महिना वेगळा असणार. जूनच्या आधी मे महिना 31 दिवसांचा आहे. म्हणजे 6 जूनच्या आधी 6 दिवस जूनचे आणि 31 दिवस मेचे असे 37 दिवस गेल्यावर एप्रिलचे तीन दिवस कमी करायचे म्हणजे 27 एप्रिल ही तारीख आली. आणि त्या दिवशी नेमका मंगळवारच आहे.

बाबा–	ठीक. आता सांगा 2005 मध्ये एक जानेवारीला कोणता वार असणार?

रवि–	1-1-2004 ला गुरुवार आहे. हे लीप वर्ष असल्यामुळे 1-1-2005 त्यानंतर 366 दिवसांनी येणार. 366 चा बाकी वर्ग त्या संख्येस सातने भागल्यावर 2 येतो. म्हणजे 1-1-2004 च्या वारात दोन मिळवावे लागतील आणि 1-1-2005 ला शनिवार येईल.

सुशीला–	थांब. मला बघु दे. 2004 च्या 31 डिसेंबरला या दिनदर्शिकेप्रमाणे शुक्रवार आहे. तेंव्हा 1-1-2005 ला शनिवार असणार हे बरोबरच आहे.

प्रसाद–	पण 1-1-2003 ला कोणता दिवस हे कसे काढणार?

रवि–	आपण आताच पाहिले की 1-1-2004 ला गुरुवार आहे. त्याच्या आधी 365 दिवस जायला हवे कारण 2003 हे काही लीप वर्ष नाही.

सुशीला–	365 चा बाकी वर्ग एक आहे. आणि गुरुवारच्या आधी एक दिवस म्हणजे 1-1-2003 ला बुधवार असायला हवा.

रवि–	ते गेल्या वर्षीच्या दिनदर्शिकेत पहायला मिळेल. 2003 च्या एक जानेवारीस बरोबर बुधवारच आहे.

प्रसाद–	आपण बाकी वर्गांची संकल्पना वापरून दिनदर्शिकेचे काम खूपच सोपे करू शकू नाही का बाबा?

बाबा–	होय. आपण एका पोस्ट कार्डाच्या आकारात दिनदर्शिका सबंध बाळगू शकतो.

रवि–	आम्हाला बनवायला आवडेल. काही मदत करा ना आम्हाला अशी दिनदर्शिका बनवायला.

बाबा– या दिनदर्शिकेत जास्तीत जास्त तारखा असायला हव्यात.

सुशीला– म्हणजे एक ते एकतीस पर्यंत का?

बाबा– हो. पण सर्व महिन्यात तेवढे दिवस नसतात. तुम्हाला प्रत्येक महिन्याचे किती दिवस हे माहित आहे का?

रवि– हो तर. जानेवारी, मार्च, मे, जुलै. ऑगस्ट, ऑक्टोबर आणि डिसेंबरचे 31, फेब्रुवारीचे साध्या वर्षी 28 आणि लीप वर्षात 29 आणि इतर एप्रिल, जून, सप्टेंबर आणि नोव्हेंबर महिन्यांचे तीस.

बाबा– म्हणून आपण प्रत्येक महिन्याच्या पहिल्या तारखेचा वार ठरवायला हवा.

रवि– ठीक आहे. मी "बाकी वर्गा"च्या संकल्पनेस धरून पहिल्या तारखांचे वार ठरवितो.

सुशीला– मग तू फक्त जानेवारी 2004 चा कागद आपल्याकडे ठेव आणि बाकीचे मी घेते. तुझी उत्तरे मी तपासीन.

रवि– एक जानेवारीला गुरुवार आहे. एक फेब्रुवारीला 31 दिवसांनंतर येणार. त्याचा बाकी वर्ग 3 आहे कारण 31 ला 7 ने भागल्यास बाकी 3 राहते. गुरुवार नंतर तीन दिवस म्हणजे एक फेब्रुवारीला रविवार येणार. हे लीप वर्ष आहे म्हणजे फेब्रुवारीचे 29 दिवस. 29 चा बाकी वर्ग एक म्हणजे एक मार्चला सोमवार.

सुशीला– अगदी बरोबर.

रवि– एक एप्रिल पुढे 31 दिवासंनंतर येणार आणि 31 चा बाकी वर्ग 3 म्हणजे सोमवार नंतर तीन दिवासांनी गुरुवारी एक एप्रिल असणार. आता मी सरळच बाकीचे दिवस शोधुन काढतो.

एक मेला शनिवार, एक जूनला मंगळवार, एक जुलैला गुरुवार, एक ऑगस्टला रविवार, एक सप्टेंबरला बुधवार, एक ऑक्टोबरला शुक्रवार, एक नोव्हेंबरला सोमवार आणि एक डिसेंबरला बुधवार.

सुशीला– अगदी सर्वच बरोबर.

प्रसाद– आता जानेवारी, एप्रिल आणि जुलै हे महिने गुरुवारी सुरु होतात. ऑक्टोबर शुक्रवारी, मे शनिवारी, फेब्रुवारी आणि ऑगस्ट रविवारी, मार्च आणि नोव्हेंबर सोमवारी, जून मंगळवारी तर सप्टेंबर आणि डिसेंबर बुधवारी सुरू होतात. महिन्याचा पहिला दिवस कधी येणार ते महिना क्रमांक वापरून आपणास असे लिहिता येईलः 1, 4, 7, गुरुवार 10 शुक्रवार. 5 शनिवार, 2, 8 रविवार 3, 11 सोमवार, 6 मंगळवार, 9, 12 बुधवार.

आता गंमत म्हणजे जशी 2004 ची दिनदर्शिका आपण संपूर्ण जानेवारी महिन्याच्या संदर्भात बनविली तशीच पण संक्षिप्त स्वरुपात इतर महिन्यांची दिनदर्शिका बनविता येतेच. ती अशा प्रकारे बनविता येईल.

	रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
					1	2	3
संपूर्ण जानेवारी 2004 ची दिनदर्शिका	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17
	18	19	20	21	22	23	24
	25	26	27	28	29	30	31
इतर महिने क्रमांक							
1, 4, 7	4	5	6	7	1	2	3
10	5	6	7	1	2	3	4
5	6	7	1	2	3	4	5
2, 8	7	1	2	3	4	5	6
3, 11	1	2	3	4	5	6	7
6	2	3	4	5	6	7	1
9, 12	3	4	5	6	7	1	2

सुशीला– आता मला एक 21-9-2004 अशी तारीख निवडायची आहे. तिचा वार या संक्षिप्त दिनदर्शिकेत कसा पहायचा?

प्रसाद– 9 व्या महिन्याच्या रांगेत आणि 21 जानेवारीच्या तारखेखाली 6 हा दिवस येतो. आणि 6 तारखेला दिनदर्शिकेत मंगळवार आहे. म्हणजेच या दिवशी मंगळवार असणार अहे.

रवि– मलाही करून पहायचय. मला एक तारीख सांग. मी वार ओळखतो.

सुशीला– 24-11-04 या तारखेचा दिवस ओळख.

रवि– 11 व्या महिन्याच्या रांगेत आणि 24 तारखेच्या स्तंभात 7 वा दिवस आहे. आणि 7 तारखेस बुधवार आहे. म्हणजे 24-11-04 ला बुधवार असणार.

सुशीला– बरोबर.

प्रसाद– पण हे आपल्याला आणखी सोपे करायला नाही का जमणार. मला एक कल्पना सुचतेय. जानेवारी खेरीज इतर महिन्यांसाठी बाकी वर्गाच्या संख्येत काय आकडा मिळवायचा हेच लिहून ठेवावे. म्हणजे आणखी सोपे होईल. आता जानेवारी, एप्रिल आणि जुलै साठी बाकी वर्ग 0 किंवा 7 म्हणता येईल. ऑक्टोबर साठी बाकी वर्ग 1 आहे, मे साठी 2 आहे, फेब्रुवारी आणि ऑगस्ट साठी 3 आहे, मार्च आणि नोव्हेंबरसाठी 4, जूनसाठी 5 आणि सप्टेंबर व डिसेंबरसाठी 6 आहे.

रवि– बर मग?

प्रसाद– आपण आता पूर्वीसारखीच दिनदर्शिका बनवु, पण ती अधिक संक्षिप्त असणार आहे. ही पहा.

जानेवारी 2004

रविवार	सोमवार	मंगळवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31
3	6	9	1	10	5	2
11		12	4			8
			7			

रवि– आण तो कागद इकडे. आणि मला एक तारीख दे. मी वार सांगेन.

प्रसाद– ठीक. 12-3-04 या दिवशी कोणता वार होता ते सांग.

रवि– 12 चा बाकी वर्ग 5 आहे. आणि 3 या महिन्याच्या स्तंभात पहिला आकडा (किंवा बाकी वर्ग) 4 आहे. आता 5+4=9 चा बाकी वर्ग 2 आहे. आणि 2 तारखेस शुक्रवार आहे. म्हणजे 12-3-04 ला शुक्रवार आहे.

प्रसाद– जमलं हे तुला.

सुशीला– हो, पण मला जमायला हवय ना. मलाही एक तारीख सांग.

रवि– आता 19-8-04 या दिवसाचा वार काढ पाहू.

सुशीला– 19 चा बाकी वर्ग 5 आहे. आणि 8 म्हणजे ऑगस्ट महिन्याच्या स्तंभात 3 हा आकडा आहे. 5 आणि 3 यांची बेरीज 8 व बाकी वर्ग 1 आहे. आणि 1 तारखेस गुरुवार म्हणून 19-8-04 ला गुरुवार असेच का?

प्रसाद– बरोबर. पण तू हे करीत असताना मला आणखी एक कल्पना सुचली ज्यामुळे आपली दिनदर्शिका आणखी संक्षिप्त होणार आहे. कारण जानेवारीत तरी सगळ्या तारखा दाखवायची काय गरज? आपल्याला तर फक्त कुठल्याही तारखेचा बाकी वर्ग हवा असणार आहे. आणि तो तर फक्त 1 ते 7 या आकडयांपैकीच किंवा आणखीही सोपे म्हणजे खरे तर 0 ते 6 या आकडयांपैकीच असणार आहे.

रवि–   आला लक्षात तुझ्या बोलण्याचा मुद्दा. म्हणजे ही दिनदर्शिका अगदी एका चिटोऱ्यावर सुद्धा अशी जमेल.

रविवार	सोमवार	मंगळवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
4	5	6	0	1	2	3
3	6	9	1	10	5	2
11		12	4			8
			7			

सुशीला– हे फारच संक्षिप्त पण छान वाटतय. सबंध वर्षाची दिनदर्शिका येवढ्याशा चिटोऱ्यावर बसविता येते. दर वर्षी बाबा आपणास अशी एक दिनदर्शिका छापुन देऊ शकतील. ती कशी वापरायची हे सोबत लिहिले तर आपण आपल्या मित्र मैत्रिणींना भेट म्हणूनवर्षाच्या सुरुवातीस देऊ शकू.

बाबा–   हे तर तुम्ही करू शकालच. पण याहूनही जास्त करता येईल.

10. एका कपट्यावर दोनशे वर्षांची दिनदर्शिका

आतापर्यंतचा या पुस्तकाचा भाग आपण संवादाच्या स्वरुपात पाहिला. आता उरलेला भाग मी शब्दात लिहून दाखवतो. ज्यांना एक वर्षाची दिनदर्शिका कागदाच्या कपट्यावर आणल्याचे समाधान पुरे आहे, त्यांना इथेच थांबायला हरकत नाही. पण मला आणखी पुढे जाऊन भली मोठी दिनदर्शिका जवळ जवळ तेवढ्याच कागदाच्या कपट्यावर आणायला जास्त मजा वाटेल. आणि त्या कामापासून सध्या आपण काही फार दूर नाही.

आता पर्यंत आपण हे पाहिले की सबंध वर्षाची दिनदर्शिका एका कागदाच्या कपट्यावर कशी संक्षिप्तपणे बसविता येईल. तिचाच जर आपण तपशीलवार विचार केला तर आपणास एकच नव्हे तर अनेक वर्षांची भली मोठी दर्शिका बनविता येईल. ती दोनशे वर्षे किंवा अधिक काळ सुद्धा उपयोगी पडू शकते. पुन्हा एकदा आपण संदर्भासाठी 2004 या वर्षाची दिनदर्शिका पाहू.

इसवी सन 2004 ची दिनदर्शिका

रविवार	सोमवार	मंगळवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
4	5	6	0	1	2	3
3	6	9	1	10	5	2
11		12	4			8
			7			

आपल्यासमोर 2004 च्या जानेवारी महिन्याची बाकी वर्ग स्वरुपातली संक्षिप्त सारिणी वरच्या विभागात आहे. उदाहरणार्थ, या महिन्यात गुरुवारी एक तारीख आहे. 12 जानेवारी हा दिवस हवा असेल तर आपण 7 या संख्येसापेक्ष 12 चा बाकी वर्ग 5 काढतो आणि 5 तारखेस जो वार आहे तो, म्हणजे सोमवार 12 जानेवारीस असणार आहे.

जानेवारीनंतर येणाऱ्या फेब्रुवारी महिन्याची एक तारीख रविवारी असणार आहे. कारण एक जानेवारी नंतर 31 वा दिवस म्हणजे गुरुवार नंतर 3 दिवस रविवार आहे. हे आपण खालील पद्धतीने करतो. 1-2-04 या तारखेतील 1 आणि दुसऱ्या महिन्याच्या स्तंभातील बाकी वर्ग निर्देशक 3 यांची बेरीज करून बाकी वर्ग 4 मिळवतो. आणि या 4 चा वार मुख्य दिनक्रमात (म्हणजे आपल्या दिनदर्शिकेच्य पहिल्या भागात) रविवार आहे म्हणून 1-2-04 ला रविवार असणार. आणखी एक जानेवारीनंतरचे उदाहरण पहायचे तर 15-9-04 या तारखेचा वार आपण शोधू. 15 चा बाकी वर्ग 1. 9 या महिन्याच्या स्तंभात आपणास 6 हा बाकी वर्ग निर्देशक आकडा मिळतो. आपली दिनदर्शिका 2004 चीच असल्याने फक्त या दोन बाकी वर्गांची बेरीज करायची. ती 7 येते आणि 7 चा बाकी वर्ग आपण 0 असा लिहिला आहे. 0 ही संख्या बुधवारच्या स्तंभात आहे याचा अर्थ 15-9-04 या तारखेचा वार हा बुधवार ठरला. अशा तऱ्हेने 2004 या सबंध वर्षाची दिनदर्शिका आपणास तारिख आणि महिना यावरून मिळते.

आता पुढे जाऊन 2005 चा विचार करू. 2004 या वर्षात 366 दिवस आहेत कारण हे लीप वर्ष आहे. 366 चा बाकी वर्ग 2 आहे. याचा अर्थ 1 जानेवारी 2005 चा वार वरील सारिणीच्या मुख्य भागातील 1 तारखेनंतर दोन दिवसांनी म्हणजे शनिवारी येणार. आता 2005 मधील इतर दिवस काढण्यासाठी 2004 प्रमाणेच आकडेमोड करून त्यात 2005 या वर्षासाठी 366 चा बाकी वर्ग म्हणजे 2 मिळवावेत असे वाटणे साहजीक आहे. पण त्यात एक अडचण आहे. ती म्हणजे 2005 हे लीप वर्ष

नसल्यामुळे 28 फेब्रुवारीपर्यंतचे वार या पद्धतीने काढता येतील पण 1 मार्च आणि नंतरचे दिवस मात्र या पद्धतीने मिळणार नाहीत. 1 मार्च पासून 31 डिसेंबरपर्यंतचे सर्व दिवस एकेक दिवस आधीच येतील. किंवा दोन ऐवजी 2004 च्या बाकी वर्गात एकच मिळवावा लागेल. यासाठी आपण आधी 2005 ची दिनदर्शिका बनवूयात.

इसवी सन 2005 ची दिनदर्शिका

रविवार	सोमवार	मंगळवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
2	3	4	5	6	0	1
8	2	6	9	4	1	5
	3		12	7	10	
	11					

.या दिनदर्शिकेत फेब्रुवारी आणि मार्चच्या सारख्या तारखा सारख्या दिवशी येणार कारण लीप वर्ष नसल्याने या दोन्ही महिन्यांचा बाकी वर्ग सारखाच म्हणजे या 2005 च्या दिनदर्शिकेत 3 आहे. 2004 आणि 2005 या दोन वर्षांचा अभ्यास केल्यास असे लक्षात येईल की मार्च पासून पुढल्या सर्व महिन्यांचा, लीप वर्षाच्या दिनदर्शिकेपेक्षा बाकी वर्ग एकने कमी आहे. हे बरोबर आहे कारण 2005 या वर्षात 365 दिवस आहेत, लीप वर्षाप्रमाणे 366 नाहीत.

आता येवढे लक्षात घेतल्यावर 2006 ची दिनदर्शिका बनविण्यात फारशी अडचण पडत नाही. 365 चा बाकी वर्ग 1 असल्यामुळे एक जानेवारी 2006 हा दिवस एक जानेवारी 2005 च्या तुलनेने एक दिवस उशीरा म्हणजे रविवारी येणार. आणि या सारिणीत महिन्यांचे क्रमांक भरताना हे लक्षात असू द्या की 1 च्या स्तंभात मे महिन्याचा बाकी वर्ग 5 येणार. कारण 1 जानेवारी पासून 1 मे पर्यंत 31+28+31+30=120 दिवस लागतात आणि 120 चा बाकी वर्ग 1 आहे. तसेच 2 च्या स्तंभात 8, 3 च्या स्तंभात 2, 3, आणि 11 इत्यादि सारिणीच्या खालच्या भागात येणार. महिन्यांचे बाकी वर्ग कुठल्याही साध्या, म्हणजे लीप नसलेल्या, वर्षालाअसेच जोडावे लागतील. म्हणजे 1 तारखेखाली मे महिन्याचा(5) बाकी वर्ग, 2 तारखेखाली ऑगस्टचा(8) बाकी वर्ग, 3 तारखेखाली फेब्रुवारी, मार्च आणि नोव्हेंबरचा बाकी वर्ग, (2,3,11) इ.इ. आपणास मूळ 2004 चीच दिनदर्शिका समोर ठेवून सुद्धा हे मांडता येईल. आधी मूळ 2004 ची दिनदर्शिका वापरून 2004 मधील कोणत्याही तारखेचा वार कसा पहायचा हे आपण शिकलोच आहोत. 29 फेब्रुवारी हा एक विशेष दिवस (जो 2005 मध्ये अस्तित्वातच नाही) सोडून 2005 च्या कुठल्याही तारखेच वार काढताना आपण 2004 चा बाकी वर्ग अधिक 2 चा बाकी वर्ग घ्यावा आणि महिन्यांचा बाकी वर्ग साध्या वर्षाचा वापरावा जो खाली तिसऱ्या भागात दिला आहे. म्हणजे आपली दिनदर्शिका आता अशी दिसेल.

2004 आणि 2005 ची संयुक्त दिनदर्शिका

रविवार	सोमवार	मंगळवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
4	5	6	0	1	2	3
3	6	9	1	10	5	2
11		12	4			8
			7			
6	9	4	1	5	8	2
	12	7	10			3
						11

या सारिणीतील पहिल्या दोन भागांचा उपयोग करून आपण 2004 या वर्षाचा कोणताही दिवस काढायला शिकलो आहोतच. आता 2005 साठी पहिल्या मुख्य भागासह सर्वात शेवटचा भाग महिन्याचा बाकी म्हणून वापरावा कारण हे लीप वर्ष नाही. तसेच या सारिणीची 2005 साठी बनविलेल्या वरील सारिणीशी तुलना करता आपणास 2005 साठी या संयुक्त दिनदर्शिकेत बाकी वर्ग 2 मिळवावा लागेल. उदाहरणार्थ, 1-8-2005 या तारखेसाठी दिवसाचा बाकी वर्ग 1, अधिक 8 या महिन्याचा बाकी वर्ग 2 आणि 2005 या वर्षाचा बाकी वर्ग 2 असा 1-8-2005 चा बाकी वर्ग 1+2+2=5 येतो आणि सारिणीच्या मुख्य भागानुसार 1-8-2005 ला सोमवार येतो.

हे आपणास संयुक्त दिनदर्शिका न वापरता फक्त 2005 ची वरील स्वतंत्र दिनदर्शिका वापरूनही करता येते. त्या दिनदर्शिकेत 1 तारखेचा बाकी वर्ग 1 आणि ऑगस्ट चा बाकी वर्ग 2 यांची बेरीज 3 येते. आणि 3 चा वार सोमवारच येतो.

आता हीच संयुक्त दिनदर्शिका 2006 साठी वापरायची म्हटले तर तिच्यात 2006 चा बाकी वर्ग 3 घ्यावा लागेल कारण 2005 साठी 366 दिवसांनंतरचा बाकी वर्ग 2 आणि पुढे 365 दिवसांनी 2006 मध्ये येणारा बाकी वर्ग 1 यांची बेरीज घ्यावी लागेल. या ऐवजी 2006 ची स्वतंत्र दिनदर्शिका बनवायची असेल तर 2004 च्या मुख्य भागात 3 दिवस पुढे जाऊन ती दिनदर्शिका अशी बनविता येईल.

2006 ची दिनदर्शिका

रविवार	सोमवार	मंगळवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
1	2	3	4	5	6	0
5	8	2	6	9	4	1
		3		12	7	10
		11				

या दिनदर्शिकेच्या मुख्य भागाची वरील संयुक्त दिनदर्शिकेशी तुलना केल्यास हे लक्षात येईल की येथे एक जानेवारी रविवारी, म्हणजे 2004 च्या एक जानेवारीपेक्षा 3 दिवस उशिरा येते.

या सर्व विवेचनाचा अर्थ एवढाच झाला की आपण प्रत्येक वर्षासाठी वेगवेगळा न बनविता एकच मुख्य भाग एका प्रमाण वर्षाचा (जो आपल्या उदाहरणात 2004 चा आहे) ठेवावा. फक्त महिन्यांच्या बाकी वर्गांसाठी मात्र लीप–वर्ष आणि साधे वर्ष असे दोन भाग जोडावेत. आणि चालू वर्षापासून हव्या त्या वर्षापर्यंतचा बाकी वर्ग यासाठी स्वतंत्र कोश बनवावा आणि आवश्यक तसा तो वापरावा. 2004 हे प्रमाण वर्ष घेऊन आपण दिनदर्शिका बनविली तर 2005, 2006, 2007, 2008, 2009 इत्यादि वर्षांसाठी मूळ दिनदर्शिकेत 2, 3, 4, 5, 7, ... असे बाकी वर्गांचे कोष्टक बनवावे. म्हणजे आपली संपूर्ण दिनदर्शिका बनविण्यापूर्वी प्रमाण वर्ष 2004 ऐवजी कुठले घेणे सोपे याचाही विचार करू. सध्या 2003, 2002, 2001 या वर्षांसाठी -1, -2, -3, म्हणजेच 6, 5, 4 असे बाकी वर्ग घेऊन 2004 च्या आधी येणाऱ्या वर्षांसाठी ही दिनदर्शिका वापरता येईल. अशी वजावट टाळायची असेल तर आपण शक्य तो असे प्रमाण वर्ष घ्यावे जेथून बेरजेनेच इतर वर्षांचे बाकी वर्ग काढता येतील.

कुठल्याही लीप वर्षानंतरच्या वर्षाचा बाकी वर्ग दोनने, आणि लीप नसलेल्या साध्या वर्षानंतर बाकी वर्ग एकने असे वाढतात. ही बाकी वर्गांची श्रेणी कशी वाढते आणि मुख्य म्हणजे तिचा आवर्तन काल किती आहे हे आपणास आधी काढावे लागेल. यासाठी आपण 1901 या विसाव्या शतकाच्या पहिल्या वर्षापासून सुरुवात करू. जुनी दिनदर्शिका वापरून, किंवा थोडीशी आकडेमोड करून 1901 च्या 1 जानेवारीस मंगळवार होता हे आपण काढू शकतो. येवढया माहितीवर आपणास 1901 प्रमाण वर्षाच्या कोशाचा मुख्य भाग असा बनविता येईल.

रविवार	सोमवार	मंगळवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
6	0	1	2	3	4	5

या जानेवारी 1901 च्या संक्षिप्त दिनदर्शिकेच्या लीप वर्ष आणि साधे वर्ष यांच्या महिन्यांचे वरील बाकी वर्ग जोडल्यास आपली दिनदर्शिका अशी दिसेल.

जानेवारी 1901	रविवार	सोमवार	मंगळवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
	6	0	1	2	3	4	5
लीप वर्षाचे महिने	9 12	1 4 7	10	5	2 8	3 11	6
साध्या वर्षाचे महिने	4 7	1 10	5	8	2 3 9	6	9 12

1901 हे साधे वर्ष असल्यामुळे आपणास जर 16-5-1901 या तारखेचा वार शोधायचा असेल तर 16 चा बाकी वर्ग 2 अधिक 5 व्या महिन्याचा बाकी वर्ग 1 योची बेरीज करून मुख्य भागात 3 च्या बाकी वर्गाचा दिवस गुरुवार मिळतो. म्हणजे 16-5-1901 गुरुवारी होती.

आता याच सारिणीत इतर वर्ष पाहता यायला हवी आहेत. 1901 हे मूळ वर्ष असल्यामुळे त्या वर्षाचा बाकी वर्ग 0 असणार. यापुढील 1902, 1903 आणि 1904 साठी बाकी वर्ग अनुक्रमे 1, 2 आणि 3 हे असणार कारण ही सर्व वर्षे मागील वर्षानंतर 365 दिवसांनी येतात आणि 365 चा बाकी वर्ग 1 आहे. पण 1905 चा बाकी वर्ग 5 असेल कारण 1904 च्या बाकी वर्गात 2 मिळवून 366 दिवसांनंतर येणाऱ्या 1905 चा बाकी वर्ग मिळणार. त्यानंतर पुन्हा पुढचे 1908 पर्यंतचे तीन बाकी वर्ग 6, 0, आणि 1 असतील. या पद्धतीने 1901 पासूनच्या पुढील वर्षांचे बाकी वर्ग पुढील तक्त्यात पहा.

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0	1	2	3	5	6	0	1	3	4	5	6	1	2	3	4	6	0	1	2	4	5	6	0	2	3	4	5	0

1929 हे 1901 प्रमाणे लीप वर्षानंतरचे पहिले वर्ष असून त्याचा बाकी वर्गही 1901 प्रमाणे च 0 आहे. तेंव्हा 1901 ते 1928 हे 28 वर्षांचे आवर्तन (period) संपल्यावर पुन्हा त्याच 28 बाकी वर्गांची पुनरावृत्ती होणार हे उघड आहे. या 28 वर्षांची सात उपावर्तने (sub-periods) मानल्यास पहिले उपावर्तन 1901 ते 1904, दुसरे 1905 ते 1908, तिसरे 1909 ते 1912 अशा प्रकारे सातवे उपावर्तन 1925 ते 1928 असे राहील. या प्रत्येक उपावर्तनातील पहिला बाकी वर्ग अनुक्रमे 0, 5, 3, 1, 6, 4, 2 असा आहे. आणि त्या प्रत्येक उपावर्तनातील पहिल्या बाकी वर्गानंतरचे इतर तीन बाकी वर्ग सात सापेक्ष क्रमाने येणाऱ्या संख्या आहेत. उदाहरणार्थ, 1921 पासून सुरु होणाऱ्या उपावर्तनाचा बाकी वर्ग 4 आहे. म्हणजेच पुढचे तीन बाकी वर्ग 5, 6, आणि 0 असे असणार. ही सारिणी संक्षिप्त स्वरुपात खाली मांडली आहे.

उपावर्तनाचे सुरुवातीचे वर्ष	1901	1905	1909	1913	1917	1921	1925	1929
त्या वर्षाचा बाकी वर्ग	0	5	3	1	6	4	2	0...

आणि हीच सारिणी पूर्वी बनविलेल्या सारिणीस जोडून आपली दिनदर्शिका अशी बनविता येईल.

जानेवारी 1901	रविवार 6	सोमवार 0	मंगळवार 1	बुधवार 2	गुरुवार 3	शुक्रवार 4	शनिवार 5	
लीप वर्षाचे महिने	9 12	1 4 7	10	5	2 8	3 11	6	
साध्या वर्षाचे महिने	4 7	1 10	5	8	2 3 9	6	9 12	
उपआवर्तनाचे प्रथम वर्ष	1901	1905	1909	1913	1917	1921	1925	1929
प्रथम वर्षाचा बाकी वर्ग	0	5	3	1	6	4	2	0...

आता आपली दिनदर्शिका संपूर्ण तयार आहे. हिचा उपयोग आपण 1901 ते 2099 या 198 वर्षांसाठी करू शकतो. त्यासाठी आपण काही उदाहरणे बघु.

15-12-1901 या तारखेसाठी आपणास 15 या दिवसाचा, 12 या महिन्याचा आणि 1901 या वर्षाचा बाकी वर्ग हे लागतील. 15 चा बाकी वर्ग 1, 12 या महिन्याच्या (साध्या वर्षाच्या रांगेत) स्तंभातील मुख्य भागात बाकी वर्ग 5 आणि1901 हेच प्रमाण वर्ष असल्यामुळे या वर्षाचा बाकी वर्ग 0 आहे. या तिघांची बेरीज 6 आली आणि 6 हा रविवारचा बाकी वर्ग आहे. म्हणजे 15-12-1901ला रविवार आहे. असेच आणखी काही दिवस आपण या जंगी दिनदर्शिकेत शोधु.

1 ऑगस्ट 1920 रोजी लोकमान्य टिळकांचे निधन झाले. त्या दिवशी कोणता वार होता हा प्रश्न आपण सोडवू. 1 तारखेचा बाकी वर्ग हा 1 च, ऑगस्ट हा आठवा महिना. 1920 हे लीप वर्ष असल्यामुळे त्या वर्षी ऑगस्टचा बाकी वर्ग 3 आणि 1920 वर्षाचा बाकी वर्ग 1917 या वर्षाच्या 6 मध्ये 3 मिळवून 9 किंवा (सात सापेक्ष) या संख्येचा बाकी वर्ग 2 आला. या तीन बाकी वर्गांची बेरीज 1+3+2=6 आली आणि 6 या बाकी वर्गाचा दिवस रविवार आहे. म्हणजे लोकमान्यांचे निधन रविवारी झाले होते.

15-8-1947 रोजी भारताला स्वातंत्र्य मिळाले हे आपणा सर्वास ठाऊक आहे. पण त्या दिवसाचा वार किती लोकांना माहित असेल? तो आपण काढू. 15 चा बाकी वर्ग 1, आणि लीप नसलेल्या ऑगस्टचा (म्हणजे 8 व्या महिन्याचा) बाकी वर्ग 2. 1947 हे वर्ष 1928 नंतर 19 वर्षांनी येते. म्हणजे 1947 चा बाकी वर्ग 1919 प्रमाणेच 1 आहे. म्हणून 15-8-1947 चा बाकी वर्ग 1+2+1=4 आहे आणि त्या दिवसाचा वार दिनदर्शिकेप्रमाणे मिळाला शुक्रवार.

30-1-1948 रोजी गांधीजींचा मृत्यु झाला. त्या दिवसाचा वार आपणास मिळेल तो असा. 30 तारखेचा बाकी वर्ग 2. लीप वर्ष असलेल्या जानेवारी महिन्याचा बाकी वर्ग 0. आणि 1948 हे वर्ष 1901 नंतर 28 वर्षांचे आवर्तन संपल्यावर 20 वर्षांनी येते आणि त्या वर्षाचा बाकी वर्ग 2. म्हणून 30-1-1948 चा बाकी वर्ग 2+0+2=4. म्हणजे 30-1-1948 ला शुक्रवार असला पाहिजे.

अगदी खूप पुढे जाऊन 26-1-2050 ला आपल्या भारतीय संविधानास शंभर वर्षे होतील तो दिवसही शोधुन काढणे तितकेच सोपे आहे. 28 वर्षांची पाच आवर्तने 140 वर्षांनी पूर्ण होतात. आणि 2040 नंतर 10 वर्षांनी 2050 हे वर्ष येणार. म्हणजे त्या वर्षाचा बाकी वर्ग 1910 च्या बाकी वर्गाएवढा किंवा 4 आहे. 26 तारखेचा बाकी वर्ग 5 आणि साध्या जानेवारी महिन्याचा बाकी वर्ग 0. म्हणजे 26-1-2050 चा बाकी वर्ग 5+0+4 चा किंवा 2 आला. त्या दिवशी सुद्धा अर्थातच बुधवार आसणार.

ही दिनदर्शिका 2099 नंतर किंवा 1901 च्या आधी वापरता येत नाही. कारण 1900 आणि 2100 ही वर्षे चार च्या पटीत असली तरी लीप वर्षे नाहीत. लीप वर्ष दर चार वर्षांनी येते, पण दर शंभराव्या वर्षी लीप वर्ष गाळले जाते आणि दर चारशेव्या वर्षी पुन्हा येते. थोडक्यात ज्या वर्षाच्या संख्येला चार आणि चारशे या दोन्ही आकडयांनी पूर्ण भाग जातो तेच लीप वर्ष असते. त्यामुळे 2000 हे जरी लीप वर्ष असले तरी 1700, 1800, 1900, 2100, 2200 आणि 2300 ही लीप वर्षे नसणार. त्यामुळे अधिक वर्षांसाठी हवे असेल तर आपण बनविलेले 28 वर्षांचे आवर्तन बदलावे लागेल आणि आपली दिनदर्शिका किचकट होईल. पण आपणास ती कशी बनवावी हे कळले आहे. ही मर्यादा लक्षात ठेवून आपल्या दिनदर्शिकेचा उपयोग करायला आपण सुरुवात करावी. करणार ना तुम्ही?