संख्यानगरीत भटकंती

१. चला माझ्याबरोबर

मी मराठी सातवीत आहे. मला गोष्टी वाचायला आणि वेगवेगळे खेळ खेळायला फार आवडतात.
माझे काका गणिताचे प्रोफेसर आहेत. ते मला नेहमी म्हणायचे, "तुला गणितात स्वतःचे छोटे छोटे शोध लावता आले तर विषयात गोडी वाटेल. त्यासाठी एक मार्ग म्हणजे नैसर्गिक संख्यांचे गुणधर्म तपासून पाहणे, त्यांची ओळख करून घेणे आणि त्यांच्याबरोबर बिनधास्तपणे भटकंती करणे. यात तुला खूप मजा येईल. भटकंती म्हणजे इतर काही नसून संख्यांच्या बेरजा, वजाबाक्या, गुणाकार, भागाकार, वर्ग इत्यादि करून पहायचे आणि त्यातून काही निष्कर्ष काढायचे एवढेच." पण मला त्यांचे म्हणणे नीट न समजल्याने मी ते फारसे मनावर घेतले नाही.
एके दिवशी जवळच्या एका माध्यमिक शाळेच्या गणित अभ्यास–मंडळाच्या सभासदांनी काकांना एक भाषण द्यायला बोलावले होते. काकांनी मला 'येतोस का' असे विचारले आणि त्या दिवशी सोबत खेळायला कुणी मित्र नव्हते म्हणून मी त्यांच्याबरोबर गेलो. ते ज्यांच्यापुढे भाषण देणार होते ती मुले माझ्याच वयाची होती. ती मुले काकांना कशी प्रतिसाद देतील हे पाहण्याचीही मला उत्सुकता होतीच.
भाषणाच्या सुरुवातीस काका म्हणाले, "मी तुम्हाला बाल गणितज्ञ कसे व्हायचे आणि गणित करताना कशी गंमत अनुभवायची ते आज शिकविणार आहे."
"आजचे जग हे वेगवेगळे शोध लावण्याचे जग आहे. जगभर सर्वत्र संशोधकांना मोठा मान मिळतो. जगाला नवनव्या शोधांचे वेडच लागलेले आहे. पण संशोधक काही एका रात्रीत शोध लावीत नसतो. संशोधन वृत्ती ही लहानपणापासून स्वतःला लावून घ्यायची आणि जोपासायची अशी सवय आहे. प्रत्येक गोष्टीकडे चिकित्सक बुद्धीने पहायला शिकाल तरच चांगले संशोधन करता येईल.
"नैसर्गिक संख्या हे गणितात संशोधनासाठी फुकटात सर्वांना उपलब्ध असलेले प्रचंड भांडार आहे. संशोधनास काही खर्च तर नाहीच, उलट त्यातून आनंद आणि मनोरंजन मात्र भरपूर मिळते. फक्त बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार करायला आले की बस. नैसर्गिक संख्याचे अनेक सुंदर गुणधर्म येवढ्या किरकोळ कौशल्याच्या आधारावर शोधता येतात. त्याच्याच जोरावर नवे आडाखे बांधता येतात आणि पडताळून पाहता येतात. तुमच्याकडे हे प्राथमिक कौशल्य आहे त्यामुळे तुम्ही संख्यांविषयी संशोधन करण्यास खरे तर आता तयार आहात. जेवढे तुम्ही शोधाल तेवढे जास्त संशोधन तुम्हाला करता येईल याची खात्री बाळगा.
"सर्वात पहिली गोष्ट म्हणजे कुठे एक विशिष्ट नमुना किंवा अभिरचना (parttern) दिसली की ती तपासून पाहणे. नमुने तपासण्याने तुम्हाला संख्यांमधील नातेसंबंधाबद्दल तर्क करता येईल व त्यातूनच अनेक शोध लागतील.
"या संशोधनास सुरुवात करण्यासाठी मी सोबत एक तक्ता बनवून आणला आहे तो पहा.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

"आता तुम्ही म्हणाल की या तक्त्यात पहिल्या दहा नैसर्गिक संख्या चार वेळा का लिहिल्या आहेत? तर तुम्हाला तीन तीन सलग संख्यांचे गट स्वतंत्रपणे दिसावेत म्हणून. उदाहरणार्थ, नारिंगी रंगात पहिल्या ओळीत एक, दोन, तीन आणि पाच, सहा, सात असे तीन संख्यांचे गट किंवा त्रिके आहेत तर दुसऱ्या ओळीत दोन, तीन, चार आणि सहा, सात, आठ आहेत. आता प्रत्येक त्रिकातील संख्यांची बेरीज अगर गुणाकार करून येणारे उत्तर पहा. त्यातून काही तर्क करता येण्यासारखे नाते संबंध मिळतात का ते तपासा. कधी हे संबंध उघड असतील. पण ते छुपे असल्यास अधिक पाठपुरावा करावा लागेल.
"जर तुमचा एखादा अंदाज एका गटापुरता बरोबर आहे पण दुसऱ्यासाठी नाही असे दिसले तर तो सर्व सामान्य गुण नसून एका विशिष्ट गटाचे वैशिष्ट्य होय. अशा वैशिष्ट्यांवर फार वेळ घालवू नका. या उलट जे गुण सर्व गटांना लागू आहेत असे दिसते त्यांच्यावर लक्ष केंद्रित करा.
"उदाहरणार्थ, पहिल्या एक, दोन, तीन या गटात असे दिसते की पहिल्या आणि शेवटच्या संख्यांची बेरीज मधलीच्या वर्गाइतकी आहेः $1+3= 2^2$. पण हा गुण (आपला पहिला तर्क) दुसऱ्या, तिसऱ्या, अगर पुढील कोणत्याच गटात सापडत नाही. याचा अर्थ हा नाते संबंध ही पहिल्या गटाची विशिष्टता आहे, सर्व गटांचा सामान्य गुणधर्म नाही. याचा नाद सोडा. आता दुसरा गुण असा दिसतो की पहिल्या आणि शेवटच्या संख्यांची बेरीज मधलीच्या दुप्पट आहे. हा गुण मात्र पहिल्या गटात आहेच, पण तो इतर सर्व गटात आहे असे दिसते. वरील तक्त्यातील आठही गटात हा गुण तर दिसतोच, पण

कुठल्याही तीन सलग संख्या, उदा. 51, 52, 53 घेतल्या तरी 51+53=104=2x52 असे दिसते. म्हणजे हा आपला पहिला शोध की कोणत्याही तीन सलग संख्यांपैकी पहिली आणि तिसरीची बेरीज मधलीच्या दुप्पट असते.
आपला पहिला तर्क चुकला कारण तो फक्त एका विशिष्ट गटाचा विशेष होता. दुसरा तर्क बरोबर असावा कारण तो सर्वच गटांना लागू पडताना दिसतो.
एखाद्या गटाचे वैशिष्ट्य आणि सर्व गटांचे सामान्य गुण यातला फरक आला ना लक्षात?
जर तुम्हाला मास्तरांनी सांगितले की एखादे वेळी हुषार वाटता, तर ते तुम्हाला तितकेसे आवडेल का? मास्तरांनी तुम्ही नेहमीच हुषार वाटता असे म्हणावे असेच वाटेल ना? तसेच हे आहे.
तुम्ही संख्यांच्या सर्वसाधारण गुणधर्मावर लक्ष केंद्रित करा, विशिष्ट वैचित्र्यांच्या मागे फार वेळ दवडू नका.
एखादी अभिरचना बऱ्याच वेळा दिसली तर तुमच्या तो सर्वसाधारण गुणधर्म असेल या तर्काला पुष्टी मिळेल. अशा अभिरचना पुन्हा पुन्हा तपासून पहा. त्यातून तुमचे संशोधन बळकट होईल. आता आणखी काही नमुने मिळतात का?"
माझ्या लक्षात आले काही मुले कुजबुज करीत आहेत. इतक्यात काहींनी हात वर केला. मलाही काही संख्या लिहून पाहिल्यावर एक नमुना दिसला. प्रत्येक गटातील तिन्ही संख्यांची बेरीज अनुक्रमे 6, 9, 12, 15, अशी होती आणि हे सर्व 3 या संख्येच्या पटीत (3 चे विभाज्य) होते. मी तसे लिहून काकांना दाखविले त्यावर त्यांनी होकारार्थी स्मित केले. मला स्वतःचा खूपच अभिमान वाटला. हा माझा गणितातला पहिला शोध होता. काका आणखी काही मुलांच्या वह्या पहात होते. त्यात काहींनी माझ्यासारखाच तर्क केला होता. इतर काही जणांनी तीन्ही संख्यांचा गुणाकार केला होता व त्यांची उत्तरे 6, 24, 60, 120 अशी आली होती. त्यांना आढळलेला गुण शब्दात लिहायला काकांनी सांगितले. त्यांनी लिहिले की तीन सलग संख्यांचा गुणाकार सहाचा विभाज्य असतो. हेच वेगळ्या भाषेत (तीन संख्यांच्या गुणाकारास सहाने भागल्यास पूर्णांक उत्तर येते) असे कुणी एकाने लिहिले होते.
मुलांच्या या प्रतिसादाने काका चांगलेच खुष झाले. ते मुलांना शाबासकी देतायत तोच आणखी तीन मुलांनी नवे शोध लावल्याचे जाहीर केले जे आणखी मजेदार होते. काकांनी त्यांना पुढे येऊन फळ्यावर लिहायला सांगितले. मुलांनी पुढील समीकरणे फळ्यावर लिहिली.
पहिल्याने लिहिले $1x3=2^2-1$, $2x4=3^2-1$, $3x5=4^2-1$, इ.इ.,
दुसऱ्याने लिहिले 1x3+1=2x2, 2x4+1=3x3, 3x5+1=4x4, इ.इ.,
आणि तिसऱ्याने हेच शब्दात लिहिले,
1x3 ही संख्या 2x2 पेक्षा 1 ने कमी, 2x4 ही संख्या 3x3 पेक्षा 1 ने कमी, इ.इ.
काकांनी त्यातल्या एकास हा गुणधर्म शब्दात वर्णन करून सांगता येईल का असे विचारले. तो मुलगा म्हणाला, "तीन सलग संख्यांपैकी पहिली आणि शेवटची यांचा गुणाकार मधल्या संख्येच्या वर्गापेक्षा एक ने अधिक असतो." काकांनी त्या सर्व मुलांना शाबासकी दिली. आणि वर्गाला विचारले, "तुम्ही शोधलेल्या दोनपैकी कोणता गुण जास्त खोल विचारातून आला?" सर्व मुलांनी ओरडून सांगितले, "दुसरा, दुसरा." काका मग म्हणाले, "जेवढा शोधलेला गुण सखोल, तेवढी संशोधनातली मजा जास्त." अशा प्रकारे काकांनी मुलांना सखोल गुणधर्म शोधण्याचे आव्हानच दिले.
यापुढे काका म्हणाले की नवनव्या संख्यांच्या गुणधर्मांचा शोध लावण्यासाठी संख्यांची वर्गवारी करणे उपयोगी आहे. उदाहरणार्थ, सम आणि विषम संख्या, विशिष्ट संख्येचे गुणक, मूळसंख्या, संयुक्त संख्या, अशा वेगवेगळ्या वर्गीकरणाचा उपयोग होतो. तसेच संख्यांची क्रमवारी लावताना आधी आणि नंतर येणाऱ्या संख्यांसाठी अनुक्रमे पूर्ववर्ती आणि अनुवर्ती असे नवे शब्द काकांनी शिकविले. त्याचप्रमाणे एकास एक संगती, संगत संख्या अशा संकल्पना समजावून सांगितल्या. एखादी अभिरचना चटकन लक्षात येण्यासाठी एक ते शंभर मधील प्रत्येक वर्गातल्या संख्या (आणि एक ते दहा या संख्यांचे वर्ग आणि घन) लक्षात ठेवाव्यात असा सल्ला दिला.
इतक्यात एक हात वर गेला. बोलता बोलता थांबून काका म्हणाले, "तुला नवा काही शोध लागला का?" मुलाने एक वैशिष्ट्य शोधले होते. तो म्हणाला,
6=1+2+3=1x2x3 हे खरे, पण 9=2+3+4=2x3x4 हे मात्र खरे नाही. त्याला काकांनी शाबासकी दिली आणि ते पुढे म्हणाले, "काही संख्यांचे वैशिष्ट्य लक्षात आले तर तशा प्रकारचे वैशिष्ट्य आणखी कुठल्या संख्यागटात आहे का हेही पाहणे बोधदायक असते. मुलगा यावर म्हणाला की हे वैशिष्ट्य असणाऱ्या दुसऱ्या तीन संख्या सापडणारच नाहीत. मग काका म्हणाले, असे असेल तर त्या संख्या सलग असण्याचा आग्रह आता सोडून द्या. 6=1+2+3 या समीकरणाचे असे वर्णन करता येईल की सहाच्या सर्व उचित विभाजकांची (proper factors) बेरीज (म्हणजे खुद्द सहा सोडून) सहायेवढीच आहे. असे कुठे दिसते का की एखाद्या संख्येच्या सर्व उचित गुणकांची बेरीज नेमकी त्या संख्येयेवढीच आहे? अशा संख्या सापडण्यात बराच वेळ जाऊ लागला म्हणून काकांनी 1, 2, 4, 7, 14 या संख्या तपासण्यास साणगितले. मुलांनी पाचही संख्यांची बेरीज केली ती 28 अशी आली. मुलांनी म्हटले की 1, 2, 3 या 6 च्या सर्व गुणकांसारखेच वैशिष्ट्य 1, 2, 4, 7, 14 या 28 च्या गुणकांचेही आहे. एक मुलगा म्हणाला की त्याला स्वतःला आणखी अशा संख्या शोधायच्या आहेत. काकांनी त्या मुलाचे कौतुक केले आणि म्हणाले, "अशा बऱ्याच संख्यांचे गट सापडले तर हे विशिष्ट संख्यांचे वैशिष्ट्य न राहता, एका सबंध वर्गाचा तो गुणधर्म ठरेल." मला हे खूपच आवडले. एक मुलगा म्हणाला, "असे गट ओळखण्यास काय

करावे लागेल?" काका म्हणाले, "आता असे पहा की 1, 2, 3, हे सहाचे तसेच 1, 2, 4, 7, 14 हे 28 चे उचित गुणक आहेत आणि 6 आणि 28 या संख्या आपापल्या उचित गुणकांच्या बेरजेयेवढया आहेत. एका मुलाने विचारले अशा संख्यांना काही वेगळे नाव आहे का? तेंव्हा काकांनी सांगितले की अशा संख्यांना परिपूर्ण (perfect) संख्या म्हणतात. मुलांशी अशा प्रकारे संवाद झाल्यावर ज्या मुलांनी संख्यांचे नवे गुणधर्म शोधले अशा सर्वांचे काकांनी पुन्हा एकदा अभिनंदन केले आणि या उपक्रमात लक्षपूर्वक भाग घेणाऱ्या सर्वांचे आभार मानून कार्यक्रम संपविला. 'प्रयत्न केल्यास तुम्ही सारेच बाल गणितज्ञ व्हाल' असे सांगुन त्यांनी प्रत्येकाला सोबत आणलेला संख्यांचा एकेक तक्ता दिला.
सभा संपल्यावर घरी जाताना मी काकास सांगितले की ज्या मुलांनी सखोल असे नवे शोध लावले त्यांचा मला खूप हेवा वाटला. त्यांच्या सारखे बनण्यासाठी दर रविवारी काकांच्या घरी जाऊन त्यांच्याजवळ अशी गणितातली गंमत शिकायची मी इच्छा दाखविली. काका खुष झाले आणि माझ्यासाठी दर रविवारी वेळ ठेवण्याचे त्यांनी कबूल केले.
अशा तऱ्हेने माझी संख्यानगरीतली भटकंती सुरु झाली. तुम्हा वाचकांना त्यात रस वाटावा आणि समजायला सोपे व्हावे म्हणून बहुतेक ठिकाणी काकांचे शब्द जसेच्या तसे लिहीत आहे. मग चलणार ना या भटकंतीत तुम्ही माझ्याबरोबर?

२. संख्यांचे प्रकार

आज माझा काकांच्या मदतीने गणितात संशोधन करण्याचा पहिला रविवार. आधी त्यांनी मला माहित असलेल्या संख्या प्रकारांची उजळणी करायला सांगितले. म्हणजे त्या दिसल्या की मला ओळखता याव्यात म्हणून.
सम आणि विषमः त्यांनी एक मुठभर गोटया उचलल्या आणि मला विचारले "प्रत्यक्ष न मोजता या गोटयांची संख्या सम आहे की विषम आहे असे विचारल्यावर तू काय करशील?" मला प्रश्नच पडला. प्रत्यक्ष गोटया मोजता आल्या असत्या तर आलेल्या उत्तराच्या एकम स्थानच्या अंकावरून मला सम आणि विषम संख्या ओळखता येतात. पण न मोजता हे कसे करायचे हे मला कळेना. तेंव्हा काकांनी मला गोटयांच्या जोडया करायला सांगितले. मी दोन दोन गोटयांच्या जोडया वेगळ्या करू लागलो. सगळ्याच गोटया अशा तऱ्हेने जोडयात विभागल्या गेल्या तेंव्हा माझ्या लक्षात आले की एकुण गोटयांची संख्या सम असली पाहिजे. दुसऱ्यांदा अशाच मुठभर गोटया घेऊन जोडया करताना मात्र शेवटी एक गोटी अशी शिल्लक राहिली जिच्या जोडीला दुसरी गोटी शिल्लक नव्हती. तेंव्हा या वेळी गोटयांची संख्या विषम असणार. पण मी काकांना विचारले, "सरळ गोटया मोजून येणाऱ्या उत्तरात एकम स्थानी दोन चा गुणक असल्यास सम आणि नसल्यास विषम असे सांगता येते. मग तसे न करता जोडया कशासाठी लावायच्या?"
काकांनी आधी माझ्या प्रश्नाचे कौतुक केले. आणि ते पुढे म्हणाले, "आपण गोटया मोजून येणाऱ्या संख्येच्या एकम स्थानाचा विचार करीत असतो तेंव्हा आपण संख्या गणन कुठल्या पद्धतीत करीत असतो?" मी म्हटले "दशमान पद्धतीत". तेंव्हा काका पुढे म्हणाले, "बारा ही संख्या दशमान पद्धतीत एकावर दोन अशी लिहितात व एकं स्थानी दोन ही सम संख्या असते. त्या ऐवजी सात हा पाया घेऊन बारा ही संख्या कशी लिहिशील?" थोडा विचार करून मी म्हटले, "सात पाया घेऊन बारा लिहायचे तर ते 15 असे लिहावे लागतील. कारण बाराला सात ने भागल्यास भाग एक चा बसतो आणि बाकी पाच उरते." माझ्या हे बोलता बोलताच लक्षात आले की सम आणि विषम ओळखण्यासाठी पाया सात असेल तर आपण 'एकम स्थानी दोनचा गुणक नसल्यास संख्या विषम' हा नियम करू शकणार नाही. जोडया करण्याची काकांनी सुचविलेली पद्धत संख्या गणन पद्धतीतील पायावर अवलंबुन नाही हे त्या पद्धतीचे वैशिष्टय आहे. "जर नियम असा बनवला की *संख्येस दोनने निःशेष भाग जात असेल तर संख्या सम, आणि नसल्यास संख्या विषम*, म्हणजे नियम गणन पद्धतीच्या पायावर अवलंबून राहणार नाही ", काका म्हणाले.
शेवटी काकांनी मला 1 ते 100 या संख्यांचे सम आणि विषम असे दोन गट करून दुपदरी तक्त्यात लिहायला सांगितले. ते खूपच सोपे होते. त्यासाठी पुढील पानावरील तक्ता पहा. या तक्त्यात असे दिसते की दशमान पद्धतीत सम संख्यांच्या एकम स्थानी 0, 2, 4, 6, किंवा 8 हे अंक असतात आणि विषम संख्यांच्या एकम स्थानी 1, 3, 5, 7 किंवा 9 हे अंक असतात.

विभाजक आणि विभाज्यः काका म्हणाले, " अशी कुठली संख्या माहित आहे का, की त्या संख्येयेवढी नाणी तुला दिल्यास ती नाणी एका रांगेत बसविता येणारच नाहीत". मी चटकन सांगितले की अशी संख्याच नाही. कारण कोणतीही संख्या दिली तरी मी तेवढी नाणी एकापुढे एक अशी मांडू शकेनच. पण मग काका म्हणाले, "संख्येच्या विभाजकांच्या संदर्भात या विधानाचा काय अर्थ हे तू मला सांगू शकशील काय?" मी थोडासा चाचपडत म्हणालो, "1 हा कुठल्यही संख्येचा विभाजक किंवा गुणक (factor) आहे आणि प्रत्येक संख्या ही स्वतःची विभाजक आहे". आता हीच संकल्पना त्यांना विभाजकांच्या भाषेत नको तर विभाज्यांच्या भाषेत हवी होती. मी म्हणालो, "प्रत्येक संख्या 1 ची विभाज्य (multiple) आहे आणि ती स्वतःचीही विभाज्य आहे."
काकांनी मला काही नाणी देऊन अशी मांडायला सांगितली की एकापेक्षा अधिक ओळी हव्यात आणि प्रत्येक ओळीत सारखीच नाणी हवीत. मी खालील चित्रात दाखविल्याप्रमाणे रचना केली.

"आता एकुण नाण्यांची संख्या मोज", काका म्हणाले.
"पंधरा".
"या रचनेत किती ओळी आहेत?"
"तीन."
"आणि किती स्तंभ आहेत?"
"पाच."
"म्हणजे तीन वेळा प्रत्येकी पाच वस्तु घेतल्या असंच ना?"
"हो. म्हणजे तुम्हाला असे म्हणायचे आहे की 5 आणि 3 हे 15 या संख्येचे विभाजक आहेत. होय ना?"
"अगदी बरोबर. पाच आणि तीन हे विभाजक असून पंधरा हा त्यांचा गुणाकार आहे."
"कोणत्याही सम संख्येचा एक विभाजक सांग पाहू."
"दोन."
"बरोबर. आता विषम संख्येचा विभाजक कसा सांगशील?"
मी काहीसा विचार करीत म्हणालो, "म्हणजे, 21 या विषम संख्येचा 7 हा विभाजक आहे..."
"पण तू आधीच म्हणाला होतास की 1 हा प्रत्येक संख्येचा विभाजक आहे आणि प्रत्येक संख्या ही स्वतःची विभाजक असते. बरोबर ना?"
"आता आलं लक्षात."
"आता मला सांग कुठल्याही एका सम आणि एका विषम एक संख्येचा सामान्य विभाजक."
"पण तुम्ही संख्याच न सांगितल्या तर त्यांचा सामान्य विभाजक मी कसा सांगणार?"
"का नाही सांगता येणार?"
"हं, तुम्हाला असं म्हणायचय की 1 हा त्या दोन संख्यांचा सामान्य विभाजक असणारच."
"बरोबर. एक विषम संख्या आणि एक सम संख्या यांचा 1 हा सामान्य विभाजक असणारच. अशा दोन संख्याचे उदाहरण दे पाहू."
"2 आणि 3."
"आणखी एक उदाहरण दे"
"3 आणि 4".
म्हणजे त्या संख्या सलगच असायला हव्या?"
"नाही. तसं काही नाही. फक्त सलग संख्या सांगायला सोप्या असतात येवढच."
"छान. आता आपण आज येथेच थांबू. पुढच्या रविवारी ये."
मी निघालो. घरी गेल्यावर आईकडची काही नाणी घेऊन असे आणखी काही खेळ करायचे असे मनाशी ठरवूनच.

मूळ संख्या आणि जोडसंख्याः नाण्यांच्या सहाय्याने मी वेगवेगळ्या संख्यांचे आयत (दोन किंवा अधिक रांगा आणि स्तंभ असलेली आकृती) बनवून विभाजकाची संकल्पना पहात असताना माझ्या लक्षात आले की काही संख्यांच्या बाबतीत असे आयत करताच येत नाहीत. एकच रांग किंवा स्तंभ मात्र कोणत्याही संख्येचा करता येतो.
पुढच्या रविवारी भेटल्यावर मी काकांना सांगितले की दोन किंवा अधिक रांगा बनविणे नेहमीच जमते असे नाही. काका म्हणाले, "होय. अशा संख्यांची आपण एक रांग मात्र बनवू शकतो. यातून काय निष्कर्ष काढशील?"
"मी म्हटले, अशा संख्यांचे फक्त दोनच विभाजक असणार. उदाहरणार्थ, 7 या संख्येचे फक्त 1 आणि 7 हेच विभाजक आहेत."
"अगदी बरोबर. अशा संख्यांना मूळ संख्या म्हणतात. या उलट आयताकृती बनविता येत असेल तर अशा संख्यांना आपण जोडसंख्या किंवा संयुक्त संख्या म्हणतो."
"म्हणजे मूळ संख्येचे फक्त दोन विभाजक असतात आणि जोड संख्येचे दोनपेक्षा जास्त विभाजक असतात. बरोबर ना? पण 1 आणि 2 या संख्यांचे काय?"
"या प्रश्नाचे उत्तर आपण आयताच्या भाषेत देऊ शकत नाही. पण विभाजकांची संख्या या संकल्पनेने देऊ शकतो."
"असे असेल तर 2 ला मूळ संख्या म्हणता येईल कारण2 चे 1 आणि 2 असे दोन विभाजक आहेत. पण 1 चा फक्त 1 हा एकच विभाजक आहे. म्हणजे 1 ही मूळ संख्याही नाही आणि जोडसंख्याही नाही. होय ना?"
"शाबास. अगदी बरोबर. तुझी आता एक चाचणी घेतो", काका म्हणाले.
"जरूर घ्या."
" पहिली मूळ संख्या कोणती?"
"दोन."
"बरोबर. आता दुसरा प्रश्न. पहिली विषम मूळ संख्या कोणती?"

"तीन."
"मग आता सर्वात पहिली जोड संख्या कोणती ते सांग."
"चार. आणि शिवाय ती सम आहे."
"बरोबर. मग आता सर्वात पहिली जोड विषम संख्या सांग."
"अं,... 9 ही पहिली विषम जोडसंख्या. बरोबर आहे ना?"
"अर्थातच. अगदी बरोबर. आता 1 ते 100 पर्यंतच्या मूळ संख्या आणि जोड संख्यांचा तक्ता बनव."
मी सुरुवात केली. तसे ते मला काहीसे कठिण काम वाटले. सम आणि विषम संख्यांचा तक्ता करणे सोपे होते कारण संख्या आलटुन पालटुन सम किंवा विषम असत. पण हे त्या मानाने मात्र जास्त किचकट होते. तरी मी शेवटी तक्ता बनविला जो पुढे दिला आहे.
"एक ते शंभर मध्ये एकुण किती मूळ संख्या आहेत?"
"पंचवीस."
"आणि जोड संख्या?"
"यात 100 ही संख्या धरायची ना?"
"हो."
"1 ही मूळ संख्या नाही आणि जोड संख्या नाही त्यामुळे उरलेल्या 99 पैकी पंचवीस मूळ संख्या म्हणजे एकुण 99-25=74 जोड संख्या राहिल्या." काकांनी हसून हस्तांदोलन केले. त्यांना माझे उत्तर आवडले असे मला लक्षात आले.

वर्ग असलेल्या आणि वर्ग नसलेल्या संख्याः
काका म्हणाले, "आयतात नाणी ठेवताना असे कधी झाले का, की रांगा आणि स्तंभ तेवढेच आहेत?"
"होय ना. आता 9 चे बघा. नेमक्या तीन रांगा आणि तीनच स्तंभ बनले."
"अशा संख्याचे आयत विशिष्ट प्रकारचे आहेत. त्यांना काय बरे म्हणावे?"
"हे चौरसाकृती आयत असल्यामुळे त्यांना चैारस संख्या म्हणायला हरकत नाही."
"ठीक. अशा संख्यांना वर्ग असे नाव दिले गेले आहे. आता सांग प्रत्येक आयताकृती संख्येस चौरस किंवा वर्ग संख्या म्हणता येईल काय?"
"नाही. फक्त जेंव्हा स्तंभ आणि रांगा यांची संख्या सारखीच असते तेंव्हा त्यांना वर्ग संख्या म्हणता येईल."
"आता प्रत्येक चौरस संख्या आयताकृती संख्या असते असे म्हणता येईल काय?"
"होय. कारण चौरस ही सुद्धा विशिष्ट प्रकारची असली तरी आयताकृतीच आहे."
"आता वर्ग संख्येच्या गुणकांविषयी काय म्हणता येईल?"
"अशा संख्यांचे दोन समान गुणक असतात असे म्हणावे. उदाहरणार्थ 9=3x3, 4=2x2, इ.इ. होय ना?"
"आता विचार कर, 1 ही वर्ग संख्या आहे का?"
"या बाबतीत रांगा आणि स्तंभ एकेकच आहेत. त्यामुळे त्या संख्येस वर्ग कसे म्हणणार?"
"पण दोन समान गुणकांचे काय?"
"तसे 1=1x1 लिहिता येईल, पण 1=1x1x1x1 असे सुद्धा लिहिता येईल. मग 1 बद्दल काय म्हणावे?"
"थोडा थांब. घोटाळा करू नकोस. 1 ही संख्या दोन समान गुणकांच्या गुणाकाराच्या स्वरुपात लिहिता येते की नाही येवढाच प्रश्न आहे."
"अच्छा. 1=1x1 असे आहे त्यामुळे 1 या संख्येस वर्ग म्हणता येईल. बरोबर?"
"होय. आता एक ते शंभर या संख्यांचे वर्ग आणि अवर्ग (वर्ग नसलेल्या संख्या) असे गट करून तक्ता बनव बरे."
तसा तक्ता पण मी बनविला. त्यात मला मजा वाटली. कारण दोन वर्ग संख्यांमधील वर्ग नसणाऱ्याा संख्यांची संख्या पाहता त्यांचा एक विशिष्ट असा नमुना मला दिसू लागला. या सर्वच सम संख्या होत्या. मी काकांना तसे सांगताच ते म्हणाले, "दर दोन वर्ग संख्यांच्या मधल्या अंतरांचा अनुक्रम 2, 4, 6, ... असा सम संख्यांनी बनलेला दिसतो." मी म्हणालो, "काय मजा आहे ना?" "होय, आहे खरी." काका म्हणाले.

घन आणि अघन संख्याः
आता आम्ही वर्ग संख्यांपासून घन संख्यांकडे वळलो. आधी काकांनी मला नाणी अशी रचायला सांगितले की स्तंभ आणि रांगा तर सारख्या असतीलच, पण प्रत्येक नाण्यावर तेवढयाच संख्येने नाण्यांची चळत बनवायची. म्हणजे सुरुवातीस दोन रांगा आणि दोन स्तंभ अशी चार नाणी रचल्यावर प्रत्येक नाण्यावर आणखी एक नाणे ठेवून दोन दोन नाण्यांची चळत झाली. तशाच तीन रांगा, तीन स्तंभ आणि तीन पदरी चळत अशी पुढची रचना झाली.
"आता असे पहा की वर्ग संख्येचे दोन समान गुणक असतात. तसे घन संख्येचे किती गुणक?"

मी म्हणालो, "27=3x3x3. म्हणजे 27 ही घन संख्या. तसेच 8=2x2x2 म्हणून 8 ही घन संख्या. जी संख्या तीन समान गुणकांच्या गुणाकाराने येते ती घन संख्या होय."
"ठीक. आता 1 या संख्येबद्दल काय म्हणशील? ती वर्ग संख्या आहे हे तू पूर्वीच पाहिले. ती घन संख्या आहे का?"
"होय. कारण 1=1x1x1 असे लिहिता येतेच. म्हणजे 1 वर्ग संख्या आहे तशीच घन संख्या सुद्धा आहे."
"अगदी बरोबर. 1 चा घन 1, 2 चा घन 8 आणि 3 चा घन 27. तसेच 4=2x2 म्हणून 4 हा दोन चा वर्ग. आपण असेही म्हणू की 2 हा 4 चा वर्गमूळ. आणि 2 ला 8 चा घनमूळ असे म्हणता येईल. आता 1 ते 100 या संख्यांचे घन आणि अघन असा दुपदरी तक्ता मांडून विभाग कर."
मी आधी असे तक्ते करून बराच कुशल झालो होतो तेंव्हा हा तक्ता पुढे दिला आहे तसा बनविला. पूर्वीच्या वर्ग संख्यांच्या अनुभवामुळे मी याही वेळी अंतर अनुक्रमाकडे लक्ष दिले. यावेळी हा अनुक्रम 6, 18, 36 दिसला. पण तर्क करण्यासाठी मी पुढील अंतरे 60 आणि 90 अशी पाहिली.
तेंव्हा काका म्हणाले, "ही अंतरे मोठी होतायत. तेंव्हा 1 त 1000 पर्यंतच्या फक्त घन संख्याच लिही. सबंध तक्ता करण्याची गरज नाही. कशा लिहिशील?"
"तीन समान संख्याचा गुणाकार करून. संख्या क्रमाने 1, 2, 3, ... अशा घेईन."
"अगदी छान. कर पाहू हजारापर्यंत यादी".
मी थोडयाच वेळात यादी बनविली. ती होतीः 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729 आणि 1000.
काका म्हणाले, "आता पुढच्या रविवारी आपण त्रिकोणी संख्या पाहू."
"त्रिकोणी संख्या म्हणजे कोणत्या?", मी अधीरपणे म्हणालो.
"जरा दम धर. तुला कळेलच पुढच्या रविवारी."
पुढच्या रविवारी काका मला म्हणाले आधी मी काय करतोय ते पहा. मग ते नाणी घेऊन खालीलप्रमाणे रचना करायला लागले. मग त्यांनी मला त्या नमुन्याकडे पहायला व पुढच्या दोन रचना करायला सांगितल्या.
मी नीट लक्ष देऊन पाहिले व मनात म्हणालो, 'प्रत्येक रांगेत सारखीच नाणी नाहीत. उलट दर रांगेत मागच्या रांगेपेक्षा एक जास्त नाणे आहे.' हे पाहून पुढच्या दोन रचना मी खालील प्रमाणे केल्या.
"यातील प्रत्येक रचनेचा आकार कसा आहे?"
"त्रिकोणासारखा."
"होय. या संख्यांना त्रिकोणी संख्या म्हणतात. आता पर्यंत आपण बनविलेल्या त्रिकोणी संख्या लिही बरे."
"हं, ठीकः. 3, 6, 10, 15, 21, 28."
"आता नाणी न वापरता पुढच्या काही त्रिकोणी संख्या लिहिशील?"
"3 मध्ये 3 मिळविले की 6. 6 मध्ये 4 मिळविले की 10. 10 मध्ये 5 मिळविले की 15. 15 मध्ये 6 मिळविले की 21 आणि 21 मध्ये 7 मिळविले की 28. म्हणजे पुढची संख्या असणार 28+8=36 आणि त्याच्या पुढची असणार 36+9=45. होय ना?"
"अगदी बरोबर. आत 1 ही त्रिकोणी संख्या म्हणायचे की नाही? तुला काय वाटते?"
" ही वर्ग संख्या आहे, आणि घन संख्या आहे. पण ही त्रिकोणी आहे का? थांबा, थोडा मागे जाऊन विचार करतो."
असे म्हणून मी लिहिले,
15-5=10
10-4=6
6-3=3
3-2=1
"म्हणजे 1 ला त्रिकोणी म्हणायला काही हरकत दिसत नाही. होय ना?"
"फारच छान. मला तुझी प्रश्नाचे उत्तर शोधण्याची पद्धत आवडली."
"आता असे कर की..."
"एक ते शंभर या नैसर्गिक संख्या दुपदरी तक्त्यात त्रिकोणी आणि बिनत्रिकोणी अशा लिही असेच ना?"
"आता तू चटकन पुढचा विचार करायला लागला आहेस. तर मग पटकन संपव हे काम."
हे काम करायला मुळीच कष्ट पडले नाहीत. कारण या बाबतीत अंतरांचा अनुक्रम म्हणजे 1, 2, 3, ... अशा नैसर्गिक संख्यांचाच होता. पुढील पानावरील तक्ता त्यासाठी पहा.
"आता एक परीक्षा चालेल?"
"हो."
"1 नंतर अशी कोटली संख्या आहे जी वर्ग ही आहे आणि त्रिकोणी पण"
मी माझ्या तक्त्याकडे पहात उत्तरलो, "36."
"बरोबर. आता हे सांग की 1 ते 100 मध्ये एकुण किती त्रिकोणी संख्या आहेत?"

पुन्हा तक्ता पाहून मी म्हणालो, "बारा."
"ते ही बरोबर. आता हे बघ, पहिली त्रिकोणी संख्या आहे, 1. दुसरी 3. तिसरी 6 आणि चौथी 10. मी जर तुला विचारले की विसावी त्रिकोणी संख्या कोणती. तर तू काय करणार?"
आता पहायला हवे. त्यासाठी आधी मी पुन्हा एक तक्ता करतो.

क्रमांक	संख्या	क्रमांक	संख्या
1	1	4	10
2	3	5	15
3	6	6	21

मला वाटत की अशीच यादी करावी लागेल. पण ही पद्धत खूप वेळ घेणार. यापेक्षा सोपी पद्धत असेल ना?"
मग काकांनी मला सांगितले की प्रत्येक त्रिकोणी संख्येतील नाण्यांपुढे तीच संख्या उलटी नाणी टेवून काय होते ते पहा.
मी आकृतीत दिसते त्या प्रमाणे नाणी टेवली आणि म्हणालो, "आता या आयताकृती संख्या होतायत."
"या आयतांचा काही विशेष गुण तुला दिसतो का? प्रत्येक आयतातील रांगा आणि स्तंभ यांची तुलना करून बघ."
"अरेच्या, हो की. रांगांची संख्या आणि स्तंभांची संख्या या दोन सलग नैसर्गिक संख्याच आहेत. अशा आयतांना काही विशिष्ट नाव आहे काय?"
"अशा आयतांना आपण दीर्घायत असे नाव देऊ. पण दीर्घायत संख्यांची यादी तुला करता येईल काय?"
"त्या तर त्रिकोणी संख्यांच्या दुप्पटच आहेत. म्हणजे 2, 6, 12, 20, वगैरे. होय ना?"
"आता त्रिकोणी संख्यांची यादी करण्याचा आपला विचार लक्षात आहे ना तुझ्या? बघ जमते का?"
"आता आल लक्षात. दोन सलग नैसर्गिक संख्यांचा गुणाकार करायचा आणि त्याची निमपट घ्यायची. म्हणजे,
1x2/2=1, 2x3/2=3, 3x4/2=6. 4x5/2=10, इ.इ. असे करीत गेल्यास त्रिकोणी संख्या मिळतील."
पुढे थोडा विचार करून मी म्हणालो, "म्हणजे दहावी त्रिकोणी संख्या असेल 10x11/2=55 आणि विसावी त्रिकोणी संख्या असेल 20x21/2=210. असेच ना?"
"छान. तुला चांगलच जमतंय गणित. आता सांग अशी कुठली लहानात लहान संख्या आहे जी वर्ग आहे, घन आहे आणि त्रिकोणी आहे?"
"ती तर 1 हीच संख्या असणार."
"बरोबर. आता घन संख्याच्या तक्त्याकडे पाहून सांग की त्या तक्त्यात सलग अघन संख्यांची लांबी किती आहे?"
"म्हणजे 6, 18, 36, 60, 90 वगैरेच ना?"
"होय. तू म्हणाला होतास की त्या सर्वच संख्या सहाच्या पटीत आहेत. आता मला सांग सहाने भागल्यास या संख्या कशा होतील?"
थोडीशी आकडेमोड करून मी म्हणालो, "या संख्या 1, 3, 6, 10, 15 अशा आहेत. अरेच्या, या तर आपल्या त्रिकोणी संख्याच आहेत," मी फारच आनंदून म्हणालो.

पूर्ववर्ती आणि अनुवर्ती संख्याः
"आता काही नवे शब्द शिकावे लागतील ज्यामुळे विचार आणि संवाद सोपा होईल. आधी मला क्रमाने येणाऱ्या नैसर्गिक संख्या सांग बरे", काका म्हणाले.
"1, 2, 3, 4, 5, 6, वगैरे, वगैरे."
"आता यात अशी कोणती संख्या आहे जिला पूर्ववर्ती (तिच्या आधी येणारी) अशी कोणतीच संख्या नाही?"
"1"
"आता हे सांग अशी कोणती संख्या आहे जिला अनुवर्ती (नंतर येणारी) संख्या आहे?"
"प्रत्येकच संख्येनंतर येणाऱ्या अनुवर्ती संख्या आहेत."
"अशी कोणती संख्या आहे जिला अनुवर्ती संख्याच नाही?"
"कोणतीच नाही," मी म्हणालो.
"कशावरून तू असे ठामपणे सांगतोयस?"
"तुम्ही कोणतीही नैसर्गिक संख्या दिलीत तर त्या संख्येत 1 मिळवून मी पुढची, म्हणजे अनुवर्ती संख्या सांगेन."
"छान. आता पूर्ण संख्या क्रमाने सांग बरे."
"0, 1, 2, 3, 4, 5, वगैरे."
"आता या सटात 1 या संख्येची पूर्ववर्ती संख्या आहे का?"
"होय. 1 या संख्येची पूर्ववर्ती संख्या 0 आहे."
"एक संख्या आणि तिची पूर्ववर्ती किंवा अनुवर्ती संख्या यांना सलग संख्या असे म्हणता येईल का?"
"हो. त्या सलगच असणार."

"आता दोन रांगा बनव. पहिल्या रांगेत क्रमाने नैसर्गिक संख्या आणि दुसऱ्या रांगेत त्याच क्रमाने सम संख्यांची यादी कर."

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20...

"आता हे सांग की पहिल्या रांगेपासून दुसऱ्या रांगेतली संख्या कशा मिळवशील?"
"दोन ने गुणून. होय ना?"
"बरोबर. म्हणजे 1 या नैसर्गिक संख्येची संगत संख्या 2, 4 ची 8, इ.इ. आता सांग 7 ची संगत संख्या कोणती?"
"चौदा."
"आणि अठरा ही सम संख्या कोणत्या नैसर्गिक संख्येशी संगत आहे?"
"नऊ."
काकांनी माझ्या उत्तरांबद्दल मला शाबासकी दिली आणि मला म्हटले की पुढच्या आठवडयापासून मला संख्यानगरीत भटकंती करताना विशेष मजा येणार आहे. मी म्हटले, "काका, संख्यानगरी का म्हणायचे? संख्यासागर का नाही?"
"जसे तुला आवडेल तसेच तू म्हणायला माझी हरकत नाही", काका हसून उत्तरले.

३. भटकंतीची पूर्वतयारी

पुढच्या रविवारी मी उत्साहाने काकांच्या घरी गेलो. त्यांनी मला पुन्हा सांगितले की आपण जे काही पाहणार त्यासाठी फक्त बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार, वर्ग आणि घन काढणे या खेरीज दुसरे काही गणिती कौशल्य नसले तरी चालेल. मात्र समोर दिसणाऱ्या संख्यांचा नमुना किंवा त्यांतील परस्पर नातेसंबंध यावर लक्ष ठेवायचे. आतापर्यंत आपण जे नवे शब्द शिकलो त्यांचा उपयोग कसा आणि कुठे होतो यावर नजर ठेवायची. म्हणजे आपण जे शोधणार त्याचे योग्य भाषेत वर्णन करता येईल. यानंतर त्यांनी मला एक कार्ड दिले त्यावर पुढील संख्यांचा तक्ता होता.

अ	ब	क	ड
3	4	7	13
8	1	9	9
5	7	12	36
9	2	--	--

काका म्हणाले, "आता क या स्तंभातील संख्यांचे अ आणि ब मधील संख्यांशी काय नाते असेल याचा शोध घे आणि क स्तंभाच्या चौथ्या रांगेत कोणती संख्या असावी याचा तर्क कर."
"मला नमुना लक्षात आला. 3+4=7, 8+1=9, 5+7=12. म्हणजे चोथ्या रांगेत 9 आणि 2 यांची बेरीज 11 ही क च्या स्तंभात मांडावी हेच बरोबर ना? मग आपणास असे म्हणता येईल का, की अ आणि ब ची बेरीज क आहे?"
"निश्चितच. हेच आपण अ+ब=क अशा समीकरणानेही मांडू शकतो. आता ड या स्तंभातील संख्याचा अभ्यास कर आणि शेवटच्या मोकळ्या जागेत योग्य संख्या कोणती हे ठरव."
"हा नमुना तितकासा सोपा वाटत नाही. कदाचित वेगळी पद्धत वापरावी लागेल. कारण बेरीज करून तर नमुना लक्षात येत नाही. वजाबाकी तर शक्यच नाही. आता गुणाकार केले तर असे दिसतेः

अxब	ड
12	13
8	9
35	36

"अरेच्या, म्हणजे गुणाकाराने आलेली संख्या ड स्तंभातील संख्येची पूर्ववर्ती संख्या आहे. याचा अर्थ चौथ्या रांगेत ड च्या स्तंभात 9x2+1 म्हणजे 19 ही संख्या हवी. बरोबर ना?"
"अगदी बरोबर. म्हणजेच आपण ड=अxब+1 असे समीकरण लिहू शकतो, हे तुझ्या लक्षात आले असेलच"
"अगदी. मी तसे म्हणणारच होतो."
"आता हे दुसरे कार्ड पहा". असे म्हणून खालील तक्ता असलेले कार्ड काकांनी दाखविले.

प	फ	ब
3	8	10
5	24	26

6	35	37
4	--	--

आता हे शोध की प च्या स्तंभातल्या संख्यांचे फ आणि ब या स्तंभांशी काय नाते आहे."
"मी प या स्तंभातील संख्या मूळ संख्येत मिळवावी किंवा तिचा गुणाकार करावा का?"
"तुला हवे तसे कर. पण लक्षात राहण्यासाठी संख्यांचा तक्ता बनवायला विसरू नको."
मी आधी बेरीज करून खालील तक्ता बनविला.

प+प	फ
6	8
10	24
12	35

मला या दोन स्तंभांमध्ये काही नातेसंबंध दिसला नाही. म्हणून मग मी गुणाकाराचा तक्ता बनविला.

पxप	फ
9	8
25	24
36	35

आता नातेसंबंध स्पष्ट झाला. पxप ही संख्या फ स्तंभाची अनुवर्ती संख्या आहे. तेव्हा चौथ्या रांगेत 4x4-1=15 ही संख्या फ खाली हवी." असे मानाशी म्हणत मी 15 ही संख्या लिहीत असताना काका खूपच खुष झालेले दिसले. "आता प आणि ब या स्तंभातील नाते तुला चटकन लक्षात येईल."
मी प वर्ग संख्यांच्या तक्त्याकडे पाहिले आणि ब कडे व म्हणालो, " प वर्ग संख्येची अनुवर्ती संख्या ब स्तंभात आहे. तेंव्हा मोकळ्या जागेत 4x4+1=17 ही संख्या मी लिहितो."
आता काका मला म्हणाले की पुढच्या आठवडयासाठीची माझी पूर्व तयारी झालेली आहे.

४. भटकंती क्र. १

सलग नैसर्गिक संख्यांच्या जोडयाः

मी आलो तर काकांच्या टेबलावर काही कपटे आणि त्यावर लिहिलेल्या संख्या दिसल्या. त्यातलाच एक कपटा मी पहिल्या दिवशी त्यांच्या भाषणाच्या वेळी पाहिला होता. त्यांनी मला खालील वेगळा कपटा उचलायला आणि त्यातील सलग संख्यांचा अभ्यास करायला सांगितले.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

मला सलग संख्यांच्या जोडया दिसत होत्या. 1 आणि 2, 2 आणि 3, 3 आणि 4 इत्यादि दोन दोन संख्या. त्यांच्या मी बेरजा करून पाहिल्या.
1+2=3, 2+3=5, 3+4=7, 4+5=9 वगैरे. या बेरजा अनुक्रमे 3, 5, 7, 9, 11 अशा विषम संख्या होत्या. हे मी काकांना सांगितले आणि म्हणालो, "कोणत्याही दोन सलग नैसर्गिक संख्यांची बेरीज विषम असते. होय ना."
"होय. हे छान आहे. आणखी एखादा गुणधर्म तुझ्या लक्षात येतो का?"
"मी बेरीज करून पाहिली. आता वजाबाकी करतो. 2-1=1, 3-2=1, 4-3=1, 5-4=1 इ. इ. म्हणजे दोन सलग संख्यांची वजाबाकी नेहमी एक असते."
"हा गुणधर्म पहिल्यापेक्षा अधिक चांगला आहे असे तुला वाटते का?"
"नाही. पहिला याहून जास्त चांगला होता."
"वास्तविक या दुसऱ्या गुणधर्मास आपण क्षुल्लक गुणधर्म असे म्हणायला हरकत नाही. पुढे चालू ठेव."
"आता मी गुणाकार करून पाहणार आहे. 1x2=2, 2x3=6, 3x4=12, 4x5=20, वगैरे. 2, 6, 12, 20 या सर्व सम संख्या आहेत. म्हणजे सलग नैसर्गिक संख्यांचा गुणाकार सम संख्या असणार."
"हा पहिल्या गुणधर्मासारखाच म्हणायचा."
"मला याहुन सुंदर असा गुणधर्म मिळू शकेल काय?"
"मिळाला तर फारच छान. नाही का?"
"आता मी पहिल्या संख्येच्या वर्गास दुसऱ्या संख्येने भागून पाहणार आहे.
1^2 / 2= भागाकार 0, बाकी 1
2^2 / 3 = भागाकार 1, बाकी 1
3^2 / 4 = भागाकार 2, बाकी 1

$4^2 / 5$= भागाकार 3, बाकी 1.
ही खूपच गंमत आहे. बाकी नेहमीच 1 राहाते. म्हणजे दोन सलग नैसर्गिक संख्यांपैकी पहिलीच्या वर्गास दुसरीने भागले तर बाकी नेहमी 1 शिल्लक राहते."

"आता सलग संख्यांपैकी पहिली व दुसरी असे न म्हणता पूर्ववर्ती आणि अनुवर्ती असे शब्द तुला वापरायला हरकत नाही", काका म्हणाले.

"हो ना. कुठल्याही नैसर्गिक संख्येच्या वर्गास तिच्या अनुवर्ती संख्येने भागल्याश बाकी एक राहते."

"छान. पण जो भागाकार येतो त्याविषयी काय?"

"भागाकार वरील उदाहरणात 0, 1, 2, 3 असा आहे. तो जिचा वर्ग घेतला तिच्या आधीची संख्या, किंवा नवीन भाषेत पूर्ववर्ती संख्या आहे. हे सर्व एका वाक्यात असे म्हणता येईल की दोन सलग नैसर्गिक संख्यांपैकी पहिलीच्या वर्गास दुसरीने भागले तर भागाकार पहिलीच्या पूर्ववर्ती संख्येइतका आणिशिल्लक 1 राहते."

"उत्तम. आता या उलट अनुवर्ती संख्येच्या वर्गास पूर्ववर्ती संख्येने भागून पहा बरे."

$2^2 / 1$ = भागाकार 4 बाकी 0
$3^2 / 2$ = भागाकार 4 बाकी 1
$4^2 / 3$ = भागाकार 5 बाकी 1
$5^2 / 4$ = भागाकार 6 बाकी 1
$6^2 / 5$ = भागाकार 7 बाकी 1

"फक्त पहिला एक भागाकार सोडल्यास दर वेळी बाकी 1 उरते आहे आणि जिचा वर्ग घेतला तिच्याहून भागाकार दोन ने अधिक आहे."

" शाबास. आता आपण पुढच्या रविवारी भेटू."

भटकंती क्र. २

आज काकांनी मला परिचित असलेला तीन सलग नैसर्गिक संख्यांचा तक्ता माझ्यापुढे ठेवला.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

"हाच तक्ता तुम्ही गणित सभेच्या दिवशी वापरला होता ना?"

"होय. मग तुला आठवते का सलग तीन क्रमिक संख्यांचे कोणते गुणधर्म आपण तपासले होते ते?"

"नक्कीच. मी ते विसरणे शक्य नाही. अजून माझ्या आठवणीत ते सर्व चांगलेच ताजे आहेत ते असे होते.

१ तीन सलग संख्यांपैकी पहिली आणि तिसरी यांची बेरीज मधलीच्या दुप्पट असते.
२ तीन सलग संख्यांपैकी पहिली आणि तिसरीचा गुणाकार मधलीच्या वर्गाची पूर्ववर्ती संख्या असते.
३ तीन सलग संख्यांची बेरीज 3 या संख्येची विभाज्य (multiple) असते.
४ तीन सलग संख्यांचा गुणाकार सहाच्या पटीत असतो.

"शाबास. तू हे गुणधर्म चांगलेच लक्षात ठेवले आहेस आणि त्यांचा क्रम सुद्धा चांगला लावलास. आता आणखी काही नियम सापडतात का ते पहा बरे."

"आता मी तिन्हीपैकी पहिल्या दोघींचा गुणाकार करून तिसरीने भागणार आहे.

$2 \div 3 = 0$ बाकी 2
$6 \div 4 = 1$ बाकी 2
$12 \div 5 = 2$ बाकी 2
$20 \div 6 = 3$ बाकी 2
$30 \div 7 = 4$ बाकी 2.

म्हणजे भागाकार क्रमाने पूर्ण संख्या येत आहेत आणि बाकी मात्र 2 शिल्लक राहते असे दिसते."

"छान. आणखी चालू दे संशोधन."

" आता जर मी तीन सलग संख्यांपैकी कडेच्या दोन संख्यांचा गुणाकार करून मधलीने भागले तर काय होते ते पाहू.

$3 \div 2 = 1$ बाकी 1
$8 \div 3 = 2$ बाकी 2
$15 \div 4 = 3$ बाकी 3
$24 \div 5 = 4$ बाकी 4

$35 \div 6 = 5$ बाकी 5, वगैरे.
"हा तर फारच सुंदर आणि अनपेक्षित नमुना आहे. तीन सलग संख्यांपैकी कडेच्या दोहोंचा गुणाकार करून मधल्या संख्येने भागल्यास भागाकार आणि बाकी सारखेच, आणि तिन्हीतल्या पहिल्या संख्येएवढे येतात."
"किंवा असे म्हणता येईल का, की भागाकार आणि शिल्लक ही एकच संख्या असून मधल्या संख्येची ती पूर्ववर्ती संख्या आहे."
"तसेही म्हणता येईल."
"चालू दे."
"आता एकच गोष्ट राहिली. जर तीन सलग संख्यांपैकी शेवटच्या दोहोंचा गुणाकार करून पहिलीने भागल्यास काय होईल? असाच एखादा चांगला नमुना पहायला मिळेल का ते पाहतो.
$6 \div 1 = 6$ बाकी 0
$12 \div 2 = 6$ बाकी 0
$20 \div 3 = 6$ बाकी 2
$30 \div 4 = 7$ बाकी 2
$42 \div 5 = 8$ बाकी 2
$56 \div 6 = 9$ बाकी 2
$72 \div 7 = 10$ बाकी 2
$90 \div 8 = 11$ बाकी 2.
म्हणजे पहिल्या दोन भागाकारांचा अपवाद करता नेहमी बाकी दोन असते. भागाकारात पहिल्या दोन वेळा सोडल्यास 6 पासून सुरु होणाऱ्या नैसर्गिक संख्या येतात. या संख्या तीन सलग संख्यांपैकी शेवटच्या संख्येच्या अनुवर्ती आहेत, किंवा भाजकापेक्षा 3 ने अधिक आहेत."
यावर काकांनी माझी पाठ थोपटली आणि पुढच्या रविवारी येण्यास सांगितले.

भटकंती क्र. ३

चार सलग नैसर्गिक संख्याः
"आज तुला मी कुठला तक्ता दाखवणार असेन असे तुला वाटते?" काकांनी येताच विचारले.
"आधी तुम्ही मला सलग नैसर्गिक संख्यांच्या जोड्यांचा तक्ता दिला, मग तीन तीन च्या गटात सलग संख्या होत्या. आता चार चार च्या गटात संख्या दाखविणार असाल."
"बरोबर. हा पहा नवा तक्ता."

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

"आता जास्त संख्या असल्यामुळे करण्यासारख्या बऱ्याच गोष्टी आहेत. आधी मी प्रत्येक चारच्या गटात कडेच्या दोनची बेरीज आणि मधल्या दोनची बेरीज करून पाहीन."

कडेच्या दोहोंची बेरीज	मधल्या दोहोंची बेरीज
1+4=5	2+3=5
2+5=7	3+4=7
3+6=9	4+5=9
4+7=11	5+6=11, इ.इ.

"ही अधिरचना सोपी आणि चांगली आहे. कडेच्या दोन संख्यांची बेरीज मधल्या दोन संख्यांच्या बेरजेइतकीच येते. शिवाय या सर्व बेरजा विषम संख्याच आहेत."
"आता बेरजेऐवजी गुणाकार केला तर काय होईल ते पहावे.

कडेच्या दोहोंचा गुणाकार	मधल्या दोहोंचा गुणाकार
1x4=4	2x3=6
2x5=10	3x4=12
3x6=18	4x5=20
4x7=28	5x6=30

5x8=40 6x7=42

इथेही एक अभिरचना दिसते. सर्व संख्या सम आहेत. आणि कडेच्या दोन संख्यांचा गुणाकार मधल्या दोहोंच्या गुणाकारापेक्षा दोनने कमी आहे."

"ठीक. आता हे सर्व गुणाकार क्रमाने मांड आणि काही नमुना दिसतो का ते पहा."

"4, 6, 10, 12, 18, 20, 28, 30, 40, 42 इ. इ. इथे विशिष्ट नमुना सहज दिसत नाही. कारण सलग संख्यांमधील फरक कायम न राहता कधी जास्त तर कधी कमी होतो, 2, 4, 2, 4, 2, 4 असा."

"पण मग यात विशेष काही आहे असे वाटत नाही काय?"

"नाही, तशी ही गमतीदार चढउतार होणारी वजाबाकी दिसते खरी."

"ठीक. आता पुढे काय करशील?"

"मी चारही संख्यांची बेरीज करून काय होते ते अजून पाहिले नाही. पाहू का?"

"जरूर."

"या बेरजा अशा येतायत..

1+2+3+4=10

2+3+4+5=14

3+4+5+6=18

4+5+6+7=22

5+6+7+8=26

6+7+8+9=30, वगैरे.

इतकीशी गमतीदार अभिरचना नाही. पण असे म्हणायला हरकत नाही की बेरजा 10 पासून सुरू होतात आणि चार ने वाढतात."

"इतकी घाई नको करूस. मला काय दाखवायचे आहे ते नीट पहा. मग किती गम्मत दिसते ते सांग", काका म्हणाले.

"पूर्वी जसा नाणी ठेवून त्रिकोणी संख्यांचा अभ्यास केला, तसा आता नाण्यांच्या सहाय्याने चार सलग संख्यांच्या बेरजेचा विचार कर."

"आता ही अशी नाणी ठेवल्यावर काय आकार दिसतो?"

"पहिली एक आकृती सोडता बाकी सर्व आकृत्या समलंब चौकोनाच्या आहेत."

"छान. अगदी तू म्हणालास त्याप्रमाणे या संख्यांना समलंब चौकोनी संख्याच म्हणतात."

"मग पहिल्या संख्येचे काय?"

"ती सुद्धा समलंब चौकोनी संख्याच आहे. फक्त विशेष प्रकारची. जसा चौरस हा एक विशेष प्रकारचा काटकोन चौकोन असतो तसे."

"म्हणजे समलंब चौकोनी संख्या त्रिकोणी संख्यांपेक्षा व्यापक प्रकारच्या असेच ना?"

"छान. तुझी या विषयातली गती आता चांगलीच वाढली असून तुला बाल गणितज्ञ असे म्हणायला हरकत नाही. तुला आणखी काही अभिरचना या चार संख्यांच्या गटांमध्ये मिळतील असे वाटते का?"

"मी चारही संख्यांचा गुणाकार करून अद्याप पाहिलेले नाही."

"ठीक. मग चालू दे."

"हे गुणाकार असे आहेत.

1x2x3x4=24

2x3x4x5=120

3x4x5x6=360

4x5x6x7=840

5x6x7x8=1680, इ. इ.

"येथे काहीच अभिरचना दिसत नाही."

"मग या संख्यांच्या पूर्ववर्ती किंवा अनुवर्ती संख्या सुद्धा पहायला हरकत नाही", काका म्हणाले.

"बर. पाहतो करून. 23, 119, 359, 839, 1679 या पूर्ववर्ती संख्यांची सुद्धा काही अभिरचना लक्षात येत नाही. पण 25, 121, 361, 841, 1681 या पैकी पहिल्या दोन तर निश्चितच वर्ग संख्या आहेत. पण 361, 841 आणि 1681 सुद्धा वर्ग असाव्यात असे वाटते. आहेत का?"

"आपल्याकडे वर्गांचा तक्ता आहे त्यात पहा."

"मिळाले. हे सर्वच वर्ग आहेत. म्हणजे हा खूपच गहन सिद्धांत असावा की चार सलग संख्यांचा गुणाकार वर्ग संख्येपेक्षा एक ने कमी असतो."

"छान. आता तुला चांगलीच गोडी लागली आहे असे दिसते आणि तुझी प्रगती देखील उत्तम आहे. आता हा विचार कर की हे कुठल्या संख्येचे वर्ग आहेत."
"होय मी ते पाहतोच.
$25=5^2=(4+1)^2$, $1x4=4$
$121=11^2=(10+1)^2$, $2x5=10$
$361=19^2=(18+1)^2$, $3x6=18$
$841=29^2=(28+1)^2$, $4x7=28$.
आता कळले. चार सलग संख्यांपैकी पहिली आणि शेवटची संख्या यांचा गुणाकार करून त्याची अनुवर्ती संख्या घ्यावी आणि तिचा वर्ग करावा. येणारी संख्या चारी सलग संख्यांच्या गुणाकाराची अनुवर्ती संख्या असली पाहिजे. बापरे. किती गहन असा हा सिद्धांत."
"उत्तम. तुझ्या प्रयत्नांना येणारे यश पाहून मला आनंद वाटतो. तुलाही यात मजा येते आहे यात काही संशय नाही."
"होय. पण काका, मी एक प्रश्न विचारतो. आपण नेहमी सलग संख्याच घ्यायला हव्यात काय?"
"का? कंटाळा आला का तुला सलग नैसर्गिक संख्यांचा?"
"नाही, तस काही नाही. मला एवढच म्हणायचय की पुढच्या आठवडयास कोणता तक्ता तुम्ही मला देणार याची आताच मी अटकळ मनाशी बांधली आहे. त्यात आश्चर्य उरले नाही."
"पुढच्या आठवडयास तुला आश्चर्य वाटेल असाच तक्ता मी तुला देणार आहे हे आता लक्षात असु दे."

भटकंती क्र. ४

सलग त्रिकोणी संख्यांचे गुणधर्मः
"आजचा हा तक्त बघ. तुला अपेक्षित होता का?"

1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

"नाही. हा तक्ता मुळीच अपेक्षिला नव्हता. मी या क्रमाने येणाऱ्या त्रिकोणी संख्यांचा अभ्यास करावा असेच तुम्ही म्हणणार ना?"
"हो. अगदी बरोबर. चालु दे तुझे काम."
"आधी मी या क्रमीक जोडयांची बेरीज पाहीन.
1+3=4   3+6=9,   6+10=16   10+15=25
15+21=36,   21+28=49,   28+36=64   36+45=81,   इ. इ.
सरळच या सर्व संख्या वर्ग आहेत. म्हणजे दोन सलग त्रिकोणी संख्यांची बेरीज वर्ग असते."
"सुंदर. आता या तक्त्याकडे पाहून तुला हे सांगता येई ल का की पंधराव्या जोडीची बेरीज किती असणार?"
"मला वाटत की हे जमेल. कारण पहिल्या जोडीची बेरीज दोन चा वर्ग, दुसऱ्या जोडीची बेरीज तीन चा वर्ग असे दिसते. हे आठव्या जोडीपर्यंत तर मी लिहिलेले आहेच. तेंव्हा पंधराव्या जोडीची बेरीज 16 चा वर्ग म्हणजे 256 असणार. नाही का?"
"उत्तम. चालु दे पुढे."
आता मी प्रत्येक जोडीतील संख्यांचा गुणाकार करून पाहीन.
1x3=3   3x6=18   6x10=60
10x15=150   15x21=315   21x28=588,   इ.इ.
या अभिरचनेत फक्त येवढेच दिसते की सर्व संख्या तीनने विभाज्य आहेत. आता तीन हा गुणक वेगळा लिहून काय दिसते ते पाहीन.
3=3x1   18=3x6   60=3x20
150=3x50   315=3x105   588=3x196.
छे, यातही काही उलगडा होत नाही. आता मी जोडया घ्यायच्या ऐवजी तीन संख्यांचे गट पाहू का?"
"ठीक आहे. हा नवा तक्ता घे आणि कर सुरुवात."

1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

आधी मी प्रत्येक गटात कडेच्या दोन संख्यांची बेरीज करून मधल्या संख्येशी तिची तुलना करणार आहे.

कडेच्या दोन संख्यांची बेरीज	मधली संख्या
1+6=7,	3
3+10=13	6
6+15=21	10
10+21=31	15
15+28=43	21.

"सरळ काही बोध होत नाही. पण समजा मी डावीकडच्या बेरजेला मधल्या संख्येने भागिले तर काय होईल?"

7 ÷3 = 2 बाकी 1

13 ÷ 6 = 2 बाकी 1

21 ÷ 10 =2 बाकी 1

31 ÷ 15 =2 बाकी 1

43 ÷ 21 =2 बाकी 1

आता समजले. कडेच्या दोन संख्यांची बेरीज मधल्या संख्येच्या दुपटीची अनुवर्ती संख्या असते."

"शाबास. तू अभिरचना शोधायला तर शिकलासच, पण एकदा अभिरचना लक्षात आल्यावर ती शब्दात मांडायला तर फारच छान शिकलास. आता पुढे काय करणार?"

"आता कडेच्या संख्यांचा गुणाकार करून मधल्या संख्येशी तुलना करावी.

कडेच्या दोन संख्यांचा गुणाकार	मधली संख्या
1x6=6	3
3x10=30	6
6x15=90	10
10x21=210	15
15x28=420	21, वगैरे, वगैरे.

आता पुन्हा या सर्व संख्या मधल्या संख्येच्या च्या पटीत आहेत. त्यांना गुणक मांडून असे लिहिता येईलः

6=3x2   30=6x5   90=10x9   210=15x14   420=21x20.

हा एक सुंदर नमुना आहे. तीन सलग त्रिकोणी संख्यापैकी कडेच्या दोन संख्याचा गुणाकार हा मधली संख्या आणि तिची पूर्ववर्ती संख्या यांच्या गुणाकाराएवढी असते."

"फारच सुंदर."

"पण काका, आपण अशा क्रमाने येणाऱ्या संख्याच तपासायला हव्यात असे काही आहे काय?"

"आता पुढच्या रविवारी याही बाबतीत एक नवा प्रकार पहायची तयारी ठेव", असे म्हणून काकांनी तास संपविला.

भटकंती क्र. ५

"हा नवा तक्ता पहा. यात तुला काय विशेष आढळते?"

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

"मला या क्रमाने येणाऱ्या विषम संख्या दिसतात. यांचा अभ्यास करायचा का?"

"हो. पण गटाची सुरुवात 1 पासूनच करायची आणि गटाचा आकार उत्तरोत्तर मोठा करायचा."

"ठीक. आधी बेरीज पाहतो.

1+3=4

1+3+5=9

1+3+5+7=16

1+3+5+7+9=25

1+3+5+7+9+11=36, इ. इ.

"हा एक सोपा आणि सुंदर नमुना आहे. 1 पासून सुरु करून क्रमीक विषम संख्यांची बेरीज ही नेहमी वर्ग संख्या असते."

"छान, हा दुसरा तक्ता थोडासा वेगळा आहे. त्यात तुला काय करता येईल?"

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

"हे मजेदारच आहे बर का. खरीखुरी भटकंती. आता तक्त्यात दाखविल्याप्रमाणे मी बेरजा करतो.
3+5=8   7+9+11=27,   13+15+17+19=64.
"वा, वा. या तर सर्व घन संख्या आहेत. कारण पहिली संख्या 1 ही स्वतःच घन आहे. पहिली विषम संख्या घन आहे. पुढच्या दोन विषम संख्यांची बेरीज, त्या पुढील तीन विषम संख्यांची बेरीज, त्या पुढील चार विषम संख्यांची बेरीज, इ. इ. या सर्वच घन संख्या आहेत."
"अशा संख्या गटांची एक श्रेणी (sequence) तयार होते असे म्हणू या."
"म्हणजे पहिल्या सटात एक, दुसऱ्यात दोन, तिसऱ्यात तीन अशा विषम संख्यांचा समावेश आहे. या सटातील संख्यांची बेरीज अनुक्रमे 1, 8, 27, 64, अशी आहे. आता मला सांग, तू दहाव्या सटातली पहिली संख्या कोणती हे कसे ओळखशील?"
"पहिल्या सटात एकच संख्या आहे म्हणून मी दुसऱ्या सटापासून तक्ता बनवितो.

सट क्रमांक	सटातली पहिली संख्या
2	3
3	7
4	13
5	21

आता सट क्रमांकाने सटातल्या पहिल्या संख्येस भागून पाहतो.

$3 \div 2 = 1$ बाकी 1
$7 \div 3 = 2$ बाकी 1
$13 \div 4 = 3$ बाकी 1
$21 \div 5 = 4$ बाकी 1
$31 \div 6 = 5$ बाकी 1

"हे छानच जमले आहे. बाकी नेहमी एक शिल्लक असते. भागाकार भाजकाचा अनुवर्ती असतो. आणि भाजक हाच तर सट क्रमांक आहे. तेंव्हा आता काका मी तुमच्या प्रश्नाचे उत्तर देऊ शकतो. दहाव्या सटाच्या पहिल्या संख्येस 10 ने भागल्यास भागाकार 9 आणि बाकी 1 असणार. याचा अर्थ ही पहिली संख्या 91 असणार. होय ना?"
"उत्तम. आता या दहाव्या सटातील दहा विषम संख्यांची बेरीजही सांगुन टाक."
"मी त्या सर्व संख्याही सांगतो आणि त्यांची बेरीज प्रत्यक्ष न करता माझ्या संशोधनाने सांगतो.
91+93+95+97+99+101+103+105+107+109=1000. कारण दहाचा घन म्हणजेच 1000 होय."
"उत्कृष्ट."
"आता तुमच्या जवळचे तक्ते संपलेले दिसतात. मला आणखी तक्ते देणार नाही का?"
"हवाच असेल तर हा आणखी एक घे," खिशातून काकांनी आणखी एक तक्ता काढला.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

"अच्छा. तुम्ही मला सलग चार विषम संख्यांचा अभ्यास करायला सांगता आहात तर. आधी सर्वांची बेरीज करून पाहतो.
1+3+5+7=16   3+5+7+9=24   5+7+9+11=32   7+9+11+13=40
9+11+13+15=48   11+13+15+17=56   13+15+17+19=64   15+17+19+21=48.
"समजल. हे सर्व आठ या संख्येच्या पटीत आहेत."
"आता तू अभिरचना पाहण्यात पटाईत झाला आहेस."
"काका, तुमच्याकडे वर्ग आणि घन यांचे तक्ते आहेत का?"
"तू स्वतः आता ते बनवू शकतोस."
"ठीक आहे. पुढच्या आठवडयात मी ते बनवून त्यांच्याबाबतचे माझे संशोधनही दाखवेन", मी आत्मविश्वासाने म्हणालो.

भटकंती क्र. ६

मी सुरुवातीला 100 पर्यंतच्या सर्व वर्ग संख्यांचा पुढील तक्ता बनविला.

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

या तक्त्याचा मी अभ्यास सुरु केला. दोन दोन क्रमीक वर्ग संख्यांची बेरीज काही विशेष नमुन्याची दिसली नाही. फक्त एवढेच दिसले की या सर्व संख्या विषम आहेत. तसेच दोन सलग वर्ग संख्यांची वजाबाकी ही सुद्धा विषम संख्याच आहे असे दिसले. मग मी या सर्व बेरजांची श्रेणी लिहून काढली.

5 13 25 41 61 85 113 145, इ. इ.

तसेच या श्रेणीतील पदांची वजाबाकी करून मी पुढील संख्या लिहिल्या.

8 12 16 20 24 28 31 इ. इ.

पुन्हा या नव्या श्रेणीतील संख्यांची वजाबाकी करताच मला एक मजेदार गुणधर्म मिळाला.

4 4 4 4 4 4 4 इ. इ.

आता मी मूळ तक्त्यातील संख्यांची वजाबाकी करून पाहिली.

3 5 7 9 11 13 15 17 19, इ. इ.

या बाबतीत लगेच हे दिसले की या तीन पासून पुढच्या सर्व क्रमिक विषम संख्या आहेत.

येथे पुन्हा वजाबाकी केली की अर्थातच सर्व पदे समान म्हणजे 2 अशी येतात. गम्मत अशी की वर्गांच्या बेरजांच्या श्रेणीत वजाबाकी करता दुसऱ्या पायरीवर समान संख्या (4) येतात, पण वजाबाक्या घेतल्या असता अगदी पहिल्याच पायरीवर समान संख्या (2) येत होत्या. हा एक नवा अनुभव होता आणि अभ्यास पद्धतही थोडीशी वेगळी होती.

मी बनविलेला दुसरा तक्ता असा होता.

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

येथे तीन तीन वर्ग संख्यांचे गट केले होते. कडेच्या संख्यांची बेरीज आणि मधली संख्या यांची तुलना करता मला एक खोलवर जाणारा सिद्धांत सापडला.

वर्ग संख्या-त्रिकात कडेच्या संख्यांची बेरीज	मधली संख्या
10	4
20	9
34	16
52	25
74	36
100	49
130	64 इ. इ.

आता वरील तक्त्यातील पहिल्या संख्येस दुसऱ्या संख्येने भाग दिला की मजेदार नमुना तयार झाला.

$10 \div 4 = 2$ बाकी 2

द्वि $\div 9 = 2$ बाकी 2

द्वद्व $\div 16 = 2$ बाकी 2

$52 \div 25 = 2$ बाकी 2

$74 \div 36 = 2$ बाकी 2

$100 \div 49 = 2$ बाकी 2 इ. इ.

म्हणजे सलग वर्ग संख्यांच्या त्रिकात कडेच्या संख्यांची बेरीज ही मधल्या वर्ग संख्येच्या दुपटीहून दोन ने अधिक असते.

मी तिसरा तक्ता घन संख्यांचा बनविला होता.

1	8	27	64	125	216	349	512	749	1000
1	8	27	64	125	216	349	512	749	1000
1	8	27	64	125	216	349	512	749	1000
1	8	27	64	125	216	349	512	749	1000

येथे पूर्वी काकांनी दिलेल्या एका तक्त्याप्रमाणे आधी एक घन संख्या, मग दोन, मग तीन, ... असे उत्तरोत्तर वाढीव गट बनविले.
येथे बेरजा घेताच मला एक चांगला नमुना सापडला.
1+8=9 1+8+27=36 1+8+27+64=100 1+8+27+64+125=225, इ. इ.
या सर्व बेरजा वर्ग संख्या होत्या ही मला खूपच गम्मत वाटली. अधिक खोलात शिरल्यावर मला असे आढळले की पहिल्या दोन घन संख्यांची बेरीज 3 चा वर्ग, पहिल्या तीन घन संख्यांची बेरीज 6 चा वर्ग, पहिल्या चार घन संख्यांची बेरीज 10 चा वर्ग. पहिल्या पाचची बेरीज 15 चा वर्ग वगैरे. या संख्या स्वतः (ज्यांचा वर्ग घन संख्यांच्या बेरजेअवढा होता) 3, 6, 10, 15, इ. स्वतः त्रिकोणी संख्या आहेत हे माझ्या आधीच्या संशोधनात आले होते. म्हणून मी माझा नवा सिद्धांत वेगळ्या शब्दात असा लिहिलाः
एक पासून सलग जेवढया घन संख्यांची बेरीज घ्यावी त्या क्रमाच्या त्रिकोणी संख्येच्या वर्गाइतकी ही बेरीज असते. म्हणजे पहिल्या तीन घनांची बेरीज तिसऱ्या त्रिकोणी संख्येच्या (सहाच्या) वर्गाइतकी, तर पहिल्या पाच घनांची बेरीज पाचव्या त्रिकोणी संख्येच्या (15) वर्गाइतकी, असे असणार.

रजा घेताना

मी हे सर्व संशोधन काकांना रविवारी नेऊन दाखविले. त्यांना माझ्या कामाचे खूपच कौतुक वाटले यात मुळीच संशय नाही. त्यांनी मला आनंदातिशयाने मिठीच मारली. त्यांना आणि मलाही खूप आनंद वाटला. मला विशेष म्हणजे अतिशय आत्मविश्वास वाटायला लागला. त्यांनी मला "फन विथ नंबर्स" नावाचे एक पुस्तक दिले. ते स्वतः सहा आठवडयांच्या दौऱ्यावर परदेशी जाणार होते आणि त्यांनी मला त्या काळात वाचायला हे पुस्तक दिले होते. परत आल्यावर रविवारचा क्रम पुन्हा चालू करण्याचे त्यांनी मला अश्वासन दिले.
आता काही काळ आमच्या भेटी होणार नाहीत याचे मला वाईट वाटले.
मी काकांना विचारले, "सम संख्या, मूळ संख्या, जोड संख्या अशांवर तक्ते का नाही बनविले गेले?" त्यावर काका म्हणाले, "तू आता बाल गणितज्ञ आहेस. तेंव्हा तुला हव्या त्या संख्यांचे तक्ते बनविता येतील व त्या संख्यांचा स्वतंत्र अभ्यासही करता येईल."
मला स्वतःविषयी खूप अभिमान वाटला. पण आता काका सहा आठवडे भेटणार नाहीत म्हणून मी म्हणालो, "काका, खरे तर तुमचा सल्ला ऐकुन मी आधीच सुरुवात केली नाही याचेच मला दुःख वाटते". ते एवढेच म्हणाले की बऱ्याच मुलांच्या बाबतीत असे घडत असते.
सरतेशेवटी निघण्यापूर्वी काकांनी मला आणखी एक तक्ता दिला. त्यावर खालील बेरजा होत्या.

1+2=3
4+5+6=7+8
9+10+11+12=13+14+15
16+17+18+19+20=21+22+23+24, इ. इ.

"आता हा क्रम पहा आणि या क्रमाने दहावे समीकरण कुठले असेल हे तू मला सांगायचे आहे."
आधी मी केलेल्या सर्वच संशोधनापेक्षा हे प्रकरण वेगळेच आणि आव्हानात्मक वाटले. पण मला ते आव्हान स्वीकारून त्याचा शोध घ्यायचाच होता. मी सुरुवात अशी केली.

समीकरण क्रमांक	समीकरणाच्या डावीकडचे पहिले पद
1	1
2	4
3	9
4	16, इ. इ.

असे सरळच दिसत होते की प्रत्येक समीकरणात डावीकडील पहिले पद वर्ग होते. आणि ते पद चक्क समीकरण क्रमांकाचाच वर्ग होते. तेंव्हा उघडच होते की दहावे समीकरण 100 या पदापासून सुरू होणार होते.
मला अर्धे उत्तर आले होते. आता मला हे हवे होते की 100 पासून सुरु करून समीकरणाची डावी बाजू कुठपर्यंत न्यायची आणि उजवीकडे किती पदांची बेरीज करायची.

समीकरण क्रमांक	डावीकडील पदांची संख्या	उजवीकडील पदांची संख्या
1	2	1
2	3	2
3	4	3
4	5	4, इ. इ.

म्हणजे या नमुन्याच्या आधारे असे म्हणता येते की दहाव्या समीकरणात डावीकडे 11 पदे आणि उजवीकडे 10 पदे असणार. म्हणजेच ते संपूर्ण समीकरण खालीलप्रमाणे असेलः

100+101+102+103+104+105+106+107+108+109+110=111+112+113+114+115+116+117+118+119+120
काका उठून उभे राहिले आणि माझ्याशी त्यांनी सहर्ष हास्तांदोलन केले.
त्यानंतर ते काही क्षण थांबून म्हणाले, " येवढे संशोधन झाल्यावर माणसाने आणखी काही प्रश्न उपस्थित होत असतील तर तेही सोडवायला हवेत. नाही का? असे कुठले प्रश्न तुला सुचतात?"
मला पाचसहा प्रश्न सुचले आणि मी ते काकांना मांडून दाखविले.

१. कुठल्याही समीकरणाच्या उजव्या बाजूस पहिले पद कुठले असणार?
२. कुठल्याही समीकरणाच्या डाव्या (अगर उजव्या) बाजूच्या पदांची बेरीज किती असणार?
३. समीकरणाच्या उजवीकडचे शेवटचे पद कोणते?
४. समीकरणाच्या डावीकडचे शेवटचे पद कोणते?
५. अशाच प्रकारची समीकरणे आपण सम संख्या, मूळ संख्या इ. बाबतीत लिहू शकतो काय?

"म्हणजे तू आता स्वतः प्रश्न उभे करू शकतोस आणि त्यांची उत्तरे ही शोधु शकतोस. यालाच मी बाल गणित संशोधक म्हणतो."
मी अधिरपणे म्हणालो, "पण मग मला जेष्ठ गणितज्ञ केंव्हा होता येईल?"
"जेंव्हा एखाद्याला आपण जे तर्क करतो ते बरोबर की चूक या साठी सिद्धता देता येते तेंव्हा जेष्ठ गणितज्ञ होण्याच्या मार्गाला तो माणूस लागला असे म्हणता येते. आता पर्यंत आपण जे गुणधर्म पाहिले ते बरोबर असण्याची शक्यता चांगली आहे हे खरे. पण प्रत्येक बाबतीत ते बरोबर आहेत किंवा नाही हे सिद्ध कसे करायचे हे मी तुला परत आल्यावर दाखवीन.
"काका, तुम्ही मला गणितात गोडी लावलीत आणि स्वतः त्यात आनंद घ्यायला शिकविलात. त्याबद्दल कसे आभार मानावे हे मला कळत नाही" असे म्हणून साश्रु नयनांनी मी त्यांचा निरोप घेतला.

संख्यांच्या काही गुणधर्मांची यादी

१ दोन सलग नैसर्गिक संख्यांची बेरीज विषम असते.
२ दोन सलग नैसर्गिक संख्यांची वजाबाकी एक असते.
३ दोन सलग नैसर्गिक संख्यांचा गुणाकार सम असतो.
४ कोणत्याही संख्येच्या वर्गास तिच्या अनुवर्ती संख्येने छेद दिल्यास बाकी एक उरते.
५ दोन ही संख्या वगळता कोणत्याही संख्येच्या वर्गास तिच्या पूर्ववर्ती संख्येने छेद दिल्यास बाकी एक उरते.
६ सलग नैसर्गिक संख्यांच्या त्रिकापैकी कडेच्या दोन संख्यांची बेरीज मधलीच्या दुप्पट असते.
७ सलग नैसर्गिक संख्यांच्या त्रिकापैकी कडेच्या दोन संख्यांचा गुणाकार मधलीच्या पूर्ववर्ती असतो.
८ सलग नैसर्गिक संख्यांच्या त्रिकातील सर्व संख्यांची बेरीज तीन या संख्येच्या पटीत असते.
९ सलग नैसर्गिक संख्यांच्या त्रिकातील सर्व संख्यांचा गुणाकार सहा या संख्येच्या पटीत असतो.
१० सलग नैसर्गिक संख्यांच्या त्रिकातील पहिल्या दोन संख्यांच्या गुणाकारास तिसरीने छेद दिल्यास बाकी 2 राहते.
११ सलग नैसर्गिक संख्यांच्या त्रिकातील कडेच्या दोन संख्यांच्या गुणाकारास मधलीने छेद दिल्यास भागाकार आणि शिल्लक या समान व मधलीच्या पूर्ववर्ती संख्येएवढया असतात.
१२ 1 आणि 2 या संख्यांचा अपवाद वगळता कोणत्याही नैसर्गिक संख्येने तिच्या दोन निकट अनुवर्ती संख्यांच्या गुणाकारास भागले असता भागाकार भाजकापेक्षा 3 ने मोठा असतो.
१३ चार सलग नैसर्गिक संख्यांपैकी कडेच्या दोन संख्यांची बेरीज मधल्या दोहोंच्या बेरजेइतकी असते.
१४ चार सलग नैसर्गिक संख्यांपैकी कडेच्या दोन संख्यांचा गुणाकार मधल्या दोहोंच्या गुणाकारापेक्षा दोनने कमी असतो.
१५ सलग नैसर्गिक संख्यांची बेरीज समलंब चौकोनी संख्या असते. ही बेरीज 1 पासून सुरु झाल्यास येणारी संख्या त्रिकोणी असते. त्रिकोणी संख्या समलंब चौकोनी असते पण सर्वच समलंब चौकोनी संख्या त्रिकोणी नसतात.
१६ चार सलग नैसर्गिक संख्यांचा गुणाकार पहिल्या आणि शेवटच्या संख्यांच्या गुणाकाराच्या अनुवर्ती संख्येच्या वर्गाची पूर्ववर्ती संख्या असतो.
१७ चार सलग नैसर्गिक संख्यांची बेरीज मधल्या दोन (किंवा कडेच्या दोन) संख्यांच्या बेरजेच्या दुप्पट असते.
१८ चार सलग नैसर्गिक संख्यांपैकी पहिली आणि तिसरी यांची बेरीज दुसरी आणि चौथी यांच्या बेरजेपेक्षा दोनने कमी असते.
१९ दोन सलग त्रिकोणी संख्यांची बेरीज ही वर्गसंख्या असते.
२० तीन सलग त्रिकोणी संख्यांपैकी कडेच्या दोहोंची बेरीज मधलीच्या दुपटीची अनुवर्ती असते.
२१ तीन सलग त्रिकोणी संख्यांपैकी कडेच्या दोहोंचा गुणाकार तीनचा विभाज्य असतो आणि मधल्या त्रिकोणी संख्येचाही विभाज्य असतो.
२२ 1 या संख्येपासून कितीही विषम संख्याची केलेली बेरीज ही वर्गसंख्या असते.

२३ चार सलग विषम संख्यांची बेरीज 8 या संख्येची विभाज्य असते.
२४ तीन सलग वर्गसंख्यांपैकी कडेच्या दोहोंची बेरीज मधल्या संख्येच्या दुपटीपेक्षा दोनने अधिक असते.
२५ एक पासून जेवढया घन संख्यांची बेरीज घ्यावी तेवढयाच क्रमांकाच्या त्रिकोणी संख्येच्या वर्गायेवढी ती असते.